丘成桐主编

数学翻译丛书

微积分教程
——计算机代数方法（第二版）

Calculus: A Computer Algebra Approach (Second Edition)

■ I. Anshel　D. Goldfeld

■ 许明 译



高等教育出版社
Higher Education Press

本书曾是美国哥伦比亚大学的微积分教材，是一本微积分的改革性教材，作者用与传统教学不同的，所谓“计算机代数方法”来讲述微积分，这种方法借助具备一定功能的计算装置对微积分的重要定义和定理进行实验。作者的意图是鼓励学生获得对微积分的亲身实践的经验，更好地掌握微积分的概念与方法。

本书可供非数学类专业的本科生、研究生作为教材或参考书使用，也可供广大教师与研究人员使用参考。

ISBN 7-04-017388-3



9 787040 173888 >

定价 45.00 元

丘成桐主编

数学翻译丛书

微积分教程

——计算机代数方法（第二版）

Calculus: A Computer Algebra Approach (Second Edition)

■ I. Anshel D. Goldfeld

■ 许明 译


高等教育出版社
Higher Education Press

International Press

图字: 01-2005-3460

ORIGINAL ENGLISH LANGUAGE EDITION PUBLISHED BY

International Press Incorporated, Boston

P. O. Box 2872

Cambridge, MA 02238-2872

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分教程: 计算机代数方法: 第2版 / (美) 安申尔 (Anshel, I.), (美) 哥德费尔德 (Goldfeld, D.) 许明译. —北京: 高等教育出版社, 2005.7

(数学翻译丛书 / 丘成桐主编)

书名原文: Calculus——A Computer Algebra Approach

ISBN 7-04-017388-3

I.微… II.①安…②哥…③许… III.微积分-高等学校-教学参考资料 IV.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 061241 号

策划编辑 张小萍 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波
版式设计 杨 明 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京原创阳光印业有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2005年7月第1版
印　　张	32.5	**印　　次**	2005年7月第1次印刷
字　　数	560 000	**定　　价**	45.00元

物 料 号　17388-00

《数学翻译丛书》序

改革开放以后，国内大学逐渐与国外的大学增加交流．无论到国外留学或邀请外地学者到中国访问的学者每年都有增长，对中国的科学现代化都大有帮助．但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多．基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写，有些已经比较陈旧，追不上时代了．很多国家，例如俄罗斯、日本等，都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容，对数学的研究都大有裨益．高等教育出版社和海外的国际出版社有见及此，开始计划做有系统的翻译，由王元院士领导，北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作．参与的教授很多，有杨乐院士，刘克峰教授等等．我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学，丰富他们的知识．海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助，我们谨此鸣谢．

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005 年 1 月

致　谢

作者感谢哥伦比亚大学数学系的 Hervé Jacquet 教授，他为我们在哥伦比亚大学启动的微积分改革提供了催生的思想，他还提出了许多优美而简洁的证明. Hervé Jacquet, Duong H. Phong, Ramuald Dabrowsky, Patrick X. Gallagher 和 Cormac O'Sullivan 各位教授们，在本书稿的准备期间提供了不可或缺的编写方面的帮助；我们还要感谢国际出版社，它让学生们能以极低的价格得到这本教科书. 每章末尾所附加的习题是由 Maia Berkane 和 Kevin Oden 撰写的，作者对他们的全部工作表示感谢和赞赏. 我们对哥伦比亚大学工程学部的 Morton Friedman 教授表达深切的谢意，是他建立了一个计算机实验室，让我们能按此教材进行了一门试验性的课程. 作为入门项目(The Gateway Project)的主持人，他始终不渝的支持和鼓励是极其珍贵的——没有他的努力，这个项目仍旧是纸上谈兵. 最后，我们要感谢入门项目的财政支持.

目　　录

引　言

微积分教学的发展正处于关键时刻. 人们强调微积分学的计算方面和它的方法的各种应用已经有一段时间了. 正是极为明白易懂的计算机代数系统(Computer Algebra System,缩写为CAS)和各种高级计算器的出现,促使我们对如何表现和描述微积分学重新做出评估. 使用本书并不要求有一间计算机室,甚至也不要求有一套精心制作的CAS. 由于重点不在于大规模的计算和编制程序而是对基本概念的理解,有一部具有图像功能的计算器就够了.

一套CAS是指一个具有下述功能的计算装置:

(1) 它是个计算器,即它能做算术运算,并能计算标准函数的函数值,(2) 它具有二维图像功能,即它能显示单变元函数的图形,(3) 它能做微积分,即能够计算函数的导数和积分,(4) 它能做代数运算,即能够展开和简化代数表达式,(5) 它能构建函数,(6) 它具有三维图像功能,即它能显示多变元函数的图形.

CAS的巨大功能驱使我们提出如下问题:(1) 既然这种计算机制已经是自动化的了,那么,我们应该对此学科采取什么态度,以及(2) 我们如何能将CAS同经典的教学方法结合起来?

作者认为,新技术是一种机会. 没有人会考虑不在实验室工作情况下去学习例如物理学或生物学;而不通过CAS进行计算的人也是极少的. 微积分既是知识的重大突破也是(在各种领域中) 研究和开发的强大工具. 要有如此的理解(并将其应用为现代环境下的解决问题的工具),人们必须同时从抽象形式上

和范围广泛的例子中理解根本性的概念. 我们的宗旨是集中注意于最重要的定义和定理的含意,并且用它们在 CAS 上进行实验.

应该注意到,本书不是教某个具体的 CAS 该"如何做" 的手册. 我们的目的是教授微积分的概念而又不至于迷失在编制程序的泥沼中. 差不多所有的习题和例题都可以把 CAS 当作计算器来做. 除此而外,即使最先进的 CAS 也只有几个指令需要学习.

许多学生在进大学时已熟悉了初等微积分. 考虑到此点,我们决定快速地复习一下基础内容(如实数,函数和它们的图像,直线和圆). 虽然初等内容也占了少量的篇幅,但对读者没有提什么要求(就是说,本书实质上是独立自足的). 当内容不甚熟悉和更为复杂时这些章节则越重要. 在本书中我们自始至终都专注于那些作为首要原理提出来的核心概念. 一旦引进了一个概念. 我们便利用 CAS 在许多不同背景下迅速加以检验. 这个方法鼓励学生们逐渐获得对微积分的亲身实践的经验. 我们发现,这样的 CAS 经验较之于阅读一本书中现成的数百个例题更好. 在 1993—1994 年,当在哥伦比亚大学建立了一个实验性的计算机室(连同基于本书的一门课程) 时,这个方法好处的证据便明白无误了.

作者希望本书在直观上是严谨的,并指明了如何思考数学. 记住大量的公式和算法(CAS 知道所有这一切) 不是本书的目的. 这种教学观念的一个自然结果是把解决问题以分析的方式表现出来,当有可能并恰当时,也以算法的方式表现出来. 始终强调的是:如何推导出公式,为什么这种算法可行,以及 CAS 如何能解决微积分问题.

本书的这一版一开始便同时讲了单变量函数的微分和积分计算,数学建模和最优化,基本的常微分方程,而后转向了向量值函数和多变量函数的微分计算. 在向量几何、坐标系和使用 CAS 的二维和三维图像的显示上花了许多时间. 书的较后部分包括了多重积分、向量场和曲线积分、曲面积分的斯托克斯定理、微分形式的概述,同样还介绍了傅里叶级数,其中包括了傅里叶展开定理的一个证明.

本书假定学生们有机会使用一个具有上述(1),(2) 和(3) 功能的基本的 CAS. 许多习题中的大部分可以用手算或者用基本的 CAS 解决.

第零章　微积分是什么?

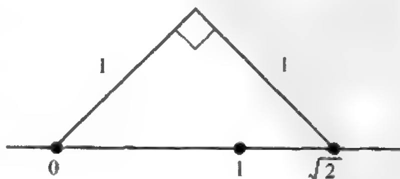
0.1 实数

整数$\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$可形象地被设想为一条直线上按等间隔标出的点.



称所得到的图形为**数直线**. 在我们做出整数的所有可能的比值时,例如$\frac{1}{2}$,$\frac{3}{4}$,$\frac{13}{4}$,我们便得到了被古希腊人称作的**有理数**. 在数直线上标出有理数后,留给我们的是一个看起来更稠密的图形.

现在考虑在数直线上$\sqrt{2}$的几何构造. 在直线上标出$\sqrt{2}$时,自然要问:$\sqrt{2}$是有理的吗? 毕达哥拉斯的一个学生希帕索斯(Hippasus)研究了这个问题. 他证明(就像我们将要做的那样)$\sqrt{2}$不是有理的. 这个认



识使他的同事们大为恼怒，以至将他处死！（但是也有其他人以正面的观点看待这个突破，为此而献祭了100头牛.）对$\sqrt{2}$不是有理数的证明是归谬证法的经典例子；证明如下. 假设$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$，其中a,b为整数. 于是$2=\frac{a^2}{b^2}$，或者

$$a^2=2b^2.$$

一般说来，任一整数均可表示为2的一个幂和一个奇数的乘积，例如，如果$a=40$，则$a=8\cdot5=2^3\cdot5$. 现在将a和b表示为这种形式，我们有

$$a=2^e\cdot a_0,\quad b=2^f\cdot b_0,$$

其中a_0和b_0都是奇数. 现将这些表达式代入公式$a^2=2b^2$中，给出了

$$2^{2e}\cdot a_0^2=2\cdot2^{2f}\cdot b_0^2=2^{2f+1}\cdot b_0^2.$$

由于a_0^2和b_0^2两者都是奇数（按定义），这迫使2的幂次必须**相同**，从而推导出$2e=2f+1$. 然而$2e$是偶数而$2f+1$是奇数. 因此，$\sqrt{2}$是有理数的假设让我们得出了矛盾，故其必是错误的.

希腊人称不是有理的数为**无理的**（反映出他们的态度）. 当我们把整数，有理数和无理数合并在一起时便得到了微积分所处理的数系，即**实数**，记为$\mathbb{R}$. 每个实数都可用一个无限小数的展开式表示，

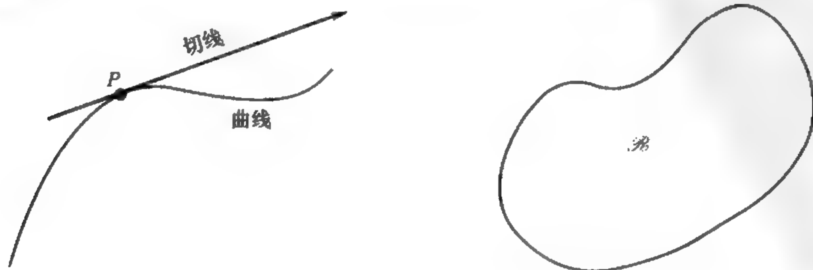
$$\sqrt{2}=1.414\cdots,$$
$$\pi=3.14159\cdots.$$

0.2 微积分是什么？

微积分是使用一种无限过程来解决有限性问题的数学方法. 这个理论所研究的两个基本问题是：

问题1（切线问题） 我们如何求出一条曲线在一点P的切线？

问题2（面积问题） 如果一条曲线围成了一个区域$\mathscr{R}$，我们如何计算$\mathscr{R}$的面积？



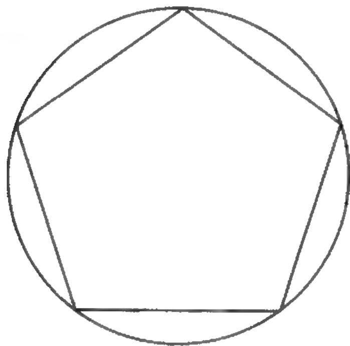
在现代环境中，这些问题会自然地发生. 例如，设想曲线为一架进行偷袭的轰炸机的轨迹. 如果发射一枚导弹，它将沿着此曲线切线的路径运行，这使得人们要准确地计算出曲线的切线方程. 再考虑海洋上的油泄漏问题. 如果我们知道海流和风的条件，我们便能得到这个泄漏的边界曲线的近似情形，而后应用微积分便能算出油污所覆盖区域的面积.

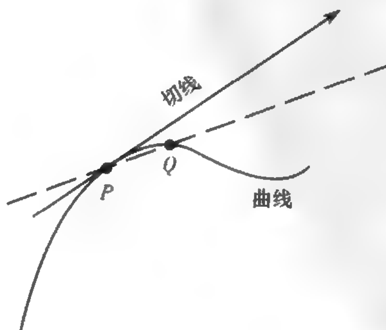
依萨克·牛顿爵士（同时还有莱布尼茨独立地）发展出微分学和积分学来分别地解决问题 1 和 2. 初看起来，上述两个问题似乎没有什么关联. 非常令人注目的是，这两个问题的解是互逆的. 为了得到一条曲线在一点切线的斜率，微分运算提供了有顺序的一系列步骤，而对区域 $\mathscr{R}$ 的面积的计算则由相同的系列步骤进行，但顺序相反. 在正式把它陈述出来时，我们便得到了微积分的基本定理. 此定理的严格推导将在正文中给出，它是本书第 I 部分的中心目标.

微积分是建立在极限这个关键概念上的（它最终让我们以聚合的方式来描述实数）. 像 $\sqrt{2}$ 或 π 这样的一个无理数不能用有限项来描述，但可以定义为有理数的一个序列的极限. 数

$$1,\quad 1.4,\quad 1.41,\quad 1.414,\quad \cdots \longrightarrow \sqrt{2}$$
$$3,\quad 3.1,\quad 3.14,\quad 3.141,\quad 3.1415,\quad \cdots \longrightarrow \pi$$

应该被想成是趋向极限 $\sqrt{2}$ 和 π 的序列. 这种思想在关于面积问题的希腊数学中就已出现. 在一个圆内利用一系列的内接多边形（其边数逐渐增多），阿基米德构造了序列，其项越来越好地逼近了此圆的面积，并趋向于作为极限的圆的准确面积. 类似地，最终提供给问题 1 解的基本思想也是由极限给出的. 在 P 点附近选取一点 Q，经过 P 和 Q 的虚线当 Q 趋向 P 时，越来越靠近在 P 点的切线. 牛顿的重大成就在于抽象地分析了 Q 趋向于 P 时的极限. 这是微分学的精华所在.





上面描述的是一个无限的过程. 利用无限过程去分析一个有限的(甚至离散的)问题的观念事实上是革命性的,而且它扩散到了整个科学,工程学,经济学,生物学等等. 不应该把这个成就所产生的影响只看成是技术性的. 应该始终记住这种思想方式已经产生了社会的和文化的成果,工业革命便是突出的例证.

第一章　函数及其图像

1.1　函数

学习数学的一个至关重要的概念是集合(各种对象的一个聚合)间的函数的观念.因此我们从下面的定义开始.

定义　*已知两个集合A,B;从A到B的一个函数是一个规则,它对集合A中每个元素指定了集合B中一个唯一的元素.*

函数无处不在.例如,如果A是某杂货店里蔬菜的集合,而B是价格的集合,于是我们有一个众所周知的函数(价格函数).这个特定的函数的规则是由店主依最大利润原则决定的.注意,价格是唯一的.一把胡萝卜不能同时被定价为90分和80分,只有唯一的一个价格.这就是为什么这个一般性定义要求其规则对A的每个元素只指定B的一个唯一的元素.

上面所给出的函数的一般性数学定义特别适合于计算机.在区分集合A和B以及它们之间的规则时,我们不得不以计算机语言进行思考.一般需要用记号命名一个函数和描述其规则.通常用一个字母,如像F(意为Function)来代表函数.如果x在集合A中,记以$x \in A$,则$F(x)$将表示由此函数规则所决定的集合B中的那个唯一的元素.我们形象化地表示一个函数如下:

$$F: A \longrightarrow B,$$

$$x \longmapsto F(x).$$

例 1.1(价格函数) 设

$$A = \{洋葱,胡萝卜,土豆,花椰菜,元白菜,豌豆\}$$

为 6 类蔬菜的集合. 设

$$B = \{65c,\$1.00,\$1.25,\$1.60,\$1.75\}$$

为 5 种价格的集合. 我们按下面的规则定义一个价格函数 P:

$$P(洋葱) = \$1.00,$$
$$P(胡萝卜) = \$1.25,$$
$$P(土豆) = 65c,$$
$$P(花椰菜) = \$1.25,$$
$$P(元白菜) = 65c,$$
$$P(豌豆) = \$1.75,$$

其中,例如 P(花椰菜) 代表花椰菜(每磅) 的价格.

例 1.2(平方函数) 设 $A = B$ 是所有实数的集合. 平方函数是对每个元素 $x \in A$ 指定了值 $x^2 \in B$ 的函数. 如果用字母 S 代表平方函数, 则它由规则 $S(x) = x^2$ 定义. 当我们在 CAS 上构造此函数时,我们可以迅速地验证,例如, $S(1.357) = 1.841\,45$, $S(256) = 65\,536$.

例 1.3(高利贷函数) 设想你自己是个高利贷者,借给别人\$100 而要求他们每个星期多欠你 10% 的债. 那就是说,一个星期之后他们欠你\$110. 现在 \$110 的 10% 为\$11,因而两星期后他们欠你\$121. 容易看出,在 x 星期后他们欠你$(100)\cdot(1.1)^x$ 美元. 这定义了高利贷函数 $L(x) = 100\cdot(1.1)^x$. 当我们在 CAS 上定义了这个函数时,我们得到了数值:$L(2) = \$121$, $L(10) = \$259.37$, $L(52) = \$14\,204.29$, $L(104) = \$2\,017\,619.45$,称其为一个**指数函数**,并称它的值为**指数式增长**. 事实上,2 年之后你将收债超过 2 百万美元.

例 1.4 你的 CAS 已经包含了许多固有的特定的函数. 例如,我们可以立刻算出下面的值:

$$\sin(\pi/8) = 0.382\,683\,4,$$
$$\tan(2.34) = -1.032\,9,$$
$$\ln(81) = 4.394\,449.$$

在下一个例子我们将看到,不是所有的函数都专门涉及到数.

例 1.5(区间函数) 设 A 表示所有实数的集合,并设 $B = \{真,假\}$ 表示真和假这两个字的集合. 构造由下面规则定义的区间函数 $i(x)$:

$$i(x)=\begin{cases}\text{真}, & \text{如果 } 1\leqslant x<2,\\ \text{假}, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

我们可以验算值 $i(1)$ = 真,$i(2)$ = 假,$i(1.2331)$ = 真,$i(-1)$ = 假.

例 1.6(绝对值函数) 定义函数 $A(x)=|x|$,其规则为

$$A(x)=\begin{cases}x, & \text{如果 } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{如果 } x<0.\end{cases}$$

我们可验算值 $A(-15)=15, A(3)=3, A(-2)=2, A(0)=0$.

§1.1 的习题

(1) 用直接存储函数的每个值的方法,在你的 CAS 上输入例 1.1 的价格函数.

(2) 在你的 CAS 上构造函数 $f(x)=2x^3-7x^2+1$. 计算值 $f(100)$, $f(5.7)$ 和 $f(\pi)$ 到 10 位小数.

(3) 在你的 CAS 上构造函数 $f(x)=2\cos(x)-3x^4+2$. 计算值 $f(1)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $f(3)$ 到 5 位小数.

(4) 在你的 CAS 上构造函数 $f(x)=(\sin(x))^3+x^2+11$. 计算值 $f(1)$, $f(3)$ 和 $f(5\pi/2)$ 到 37 位小数.

(5) 在你的 CAS 上构造例 1.6 的绝对值函数,为此要在你的 CAS 上使用 IF - THEN 指令.

(6) 在你的 CAS 上构造函数

$$g(x)=\begin{cases}x^2, & \text{如果 } x\leqslant 0,\\ 2^x, & \text{如果 } x>0.\end{cases}$$

计算值 $g(-3)$, $g(-2)$, $g(1)$, $g(10)$,并计算 $g(1/2)$ 到 10 位小数.

(7) 构造函数 $c(t)$,它把已知的华氏温度输出为摄氏温度. 提示:$c(32)=0$, $c(212)=100$. 计算值 $c(50)$, $c(70)$, $c(90)$.

(8) 假设一辆汽车以每小时 50 英里的匀速行驶. 构造函数 $d(t)$,它输出在 t 小时后汽车所行驶的距离.

(9) 在你的 CAS 上构造例 1.5 的区间函数.

(10) 在你的 CAS 上构造例 1.3 的高利贷函数. 计算值 $L(52)$, $L(104)$.

(11) 一个汽车租赁公司以一天$50 再加每英里 20 美分的价格提供汽车. 构造一个函数,它给出租一天汽车并行驶 m 英里的总价格.

(12) 在你的 CAS 上构造函数 $u(n)$,它在 n 为偶整数时输出字 EVEN,当 n 为奇整数时输出 ODD.

1.2 函数的定义域和值域

设 $F: A \to B$ 为任一函数.

定义 称集合 A 为 F 的定义域，f 的值的集合，表示为

$$F(A) = \{F(a) \mid a \in A\},$$

被称为 F 的值域.

如果我们要在一个 CAS 上对一个函数编制程序，则了解它的定义域和值域是非常重要的. 编制程序的过程实质上是从一种集合类型变化到下一个集合类型. 一般情形下，在研究一个函数时，必须小心地弄清此函数确有定义的最大可能的定义域和值域.

举例说，在 CAS 上是不能除以零的. 因而函数

$$F(x) = \frac{1}{x}$$

的定义域是除去 0 以外的所有实数的集合，其值域也是如此(注意，因为方程 $\frac{1}{x} = 0$ 对 x 无解，故 0 不在值域中).

现在考虑更复杂些的例子，

$$F(x) = \frac{1}{(x-3)^2(x+1)^2}.$$

这个函数除去 $x = 3$ 和 $x = -1$ 外均有定义，从而它的定义域由除去3，-1 的所有实数的集合组成. 其值域如何?由于一个实数的平方总是正的，我们看出此函数的值域只能由正实数组成. 是否任何数 $a > 0$ 均在值域中?此问题等于问是否对任意给出的 $a > 0$，我们能解出方程式

$$\frac{1}{(x-3)^2(x+1)^2} = a.$$

此方程等价于

$$(x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3 = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

即 $x^2 - 2x - \left(3 - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) = 0$. 应用二次方程的根公式我们得到方程的两个解：

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(3 + 1/\sqrt{a})}}{2} = 1 \pm \sqrt{4 + \frac{1}{\sqrt{a}}}.$$

因此，f的值域确实由所有正实数组成. 我们可以使用集合的语言简洁地表示这些数据如下：

定义域$(F) = \{-\infty < x < \infty$，且$x \neq -1, 3\}$，值域$(F) = \{0 < y < \infty\}$，其中我们设$y = F(x)$. 注意，0不在值域中！

可能产生另一个需要进行讨论的问题. 考虑平方根函数，$s(x) = x$的平方根. 首先注意到每个正实数有两个平方根，例如

$$s(4) = \pm 2,$$
$$s(5) = \pm 2.236\,068\cdots,$$
$$s(9) = \pm 3, \text{等等.}$$

因此必须明确指出函数$s(x)$选取哪一个平方根（正的或负的）. 通常人们指明$s(x)$是正根，

$$s(4) = \sqrt{4} = 2,$$
$$s(5) = \sqrt{5} = 2.236\,068\cdots,$$
$$s(9) = \sqrt{9} = 3, \text{等等.}$$

例1.7（负平方根函数） 可以定义另一个平方根函数s（我们不太恰当地仍称它为s），它选取了负根. 这时

$$\text{值域}(s) = \{x \leqslant 0\},$$

即s的值域为小于或等于0的所有实数的集合. 注意，由于$s(0) = 0$，故0在值域中.

s的定义域如何？因为负数的平方根不可能为实数，故必须限制s的定义域：

$$\text{定义域}(s) = \{x \geqslant 0\}.$$

注 在允许虚数出现在值域中时，这个对定义域的限制则可去掉. 由于在第一学年的微积分中不学习虚数，故我们在上面例子中对定义域和值域仅限于由实数构成的情形.

例1.8（新设计的平方根函数） 可以在CAS上构造一个新设计的平方根函数$s(x)$，其中$s(x)$在x的小数展开式最左端的数字为偶数时取正的平方根，为奇数时取负的平方根. 这个函数的数值频繁地改变符号，例如，

$$s(1) = -1,$$
$$s(4) = 2,$$
$$s(9) = -3,$$
$$s(16) = -4,$$
$$s(25) = 5,$$

$$s(\pi) = -1.772\,454\cdots,$$

等. 此函数的定义域和值域是什么?定义域无疑由所有那些大于或等于0的数组成. 此函数的值域不能被简洁地描述出来,但它是由 $s(x)$ 的输出组成,其中 x 遍历大于或等于 0 的数.

例 1.9(立方根函数)　立方根函数

$$c(x) = \sqrt[3]{x},$$

它与平方根函数很不相同. 例如

$\sqrt[3]{8} = 2$,因为 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$;

$\sqrt[3]{-8} = -2$,因为 $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3 = -8$;

$\sqrt[3]{27} = 3$;

$\sqrt[3]{-27} = -3$.

立刻就明白,只有一种可能的答案(它为实数). 因而在平方根函数那里使事情复杂化的符号不确定问题,在这里不会出现. 我们不会设计出稀奇古怪的立方根函数!假定继续限制在定义域和值域完全由实数组成的条件下,则只有一个立方根函数.

对于像 $\sqrt[4]{x}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[6]{x}, \cdots$ 这类高次根函数怎么样呢?偶次根函数

$$\sqrt[4]{x}, \sqrt[6]{x}, \sqrt[8]{x}, \cdots,$$

将完全按 $\sqrt{x}$ 的方式表现,而奇次根函数

$$\sqrt[5]{x}, \sqrt[7]{x}, \sqrt[9]{x}, \cdots,$$

则类同于 $\sqrt[3]{x}$.

§1.2 的习题

求出下列函数的定义域和值域:

(1) $f(x) = 1/(x^2 - x + 2)$.　　(2) $f(x) = 1/(x^2 + 2x + 1)$.

(3) $f(x) = x/(x^2 + 2x + 2)$.　　(4) $f(x) = 1/(x^2 + 2x + 5)$.

(5) 在你的 CAS 上构造一个平方根函数,它每次都选负根. 这个函数的定义域和值域是什么?

(6) 在你的 CAS 上构造函数 $c(x) = \sqrt[3]{x}$. c 的定义域和值域是什么?

(7) 在你的 CAS 上构造函数 $c_{19}(x) = \sqrt[19]{x}$. 此函数的定义域和值域是什么?验证值:

$$c_{19}(9) = 1.122\,6\cdots, \quad c_{19}(100) = 1.274\,27\cdots.$$

计算值 $c_{19}(10^6)$ 到 10 位小数.

(8) 在你的 CAS 上构造函数 $f(x) = x^{2/3} = (\sqrt[3]{x})^2$. 此函数的定义域和值域是什么?

(9) 绝对值函数 $|x|$ 的定义域和值域是什么?

(10) 在你的 CAS 上构造例 1.8 的新设计的平方根函数.

(11) 解释为什么函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x = \dfrac{a}{b}, \text{其中 } a, b \text{ 为整数}, b \neq 0, \\ 1, & \text{其他情形}, \end{cases}$$

不能在你的 CAS 上进行构造.

1.3 函数的图像

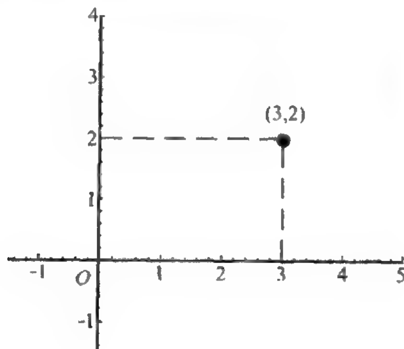
考虑函数

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

其定义域由整个实数的集合 $\mathbb{R}$ 构成,其值域是 $\mathbb{R}$ 的某个子集. 正如在第零章所表明的那样,每个实数可以考虑成数直线上一个点:



勒内 · 笛卡儿有过一个革命性的思想,即将两条这样的数直线(一条为 x 轴,一条为 y 轴) 按直角并置一起,使它们交于原点;所得到的图形称为**笛卡儿平面**. 按约定,把 x 轴画成与这页纸的底边缘平行. 任一条平行于 x 轴的直线叫做一条水平线,而任意平行于 y 轴的直线叫做竖直线.



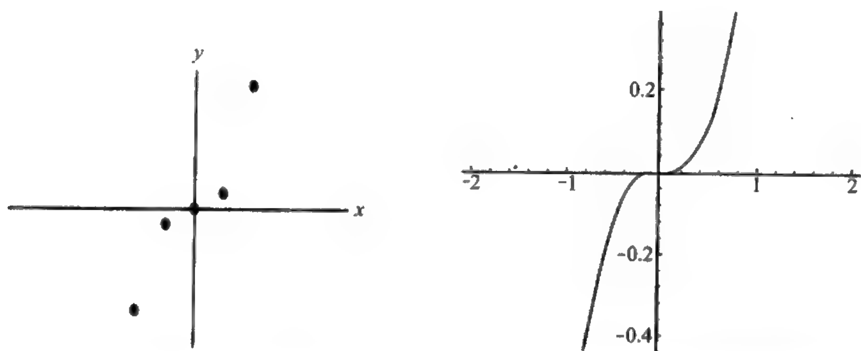
对每一对实数(a,b),在上图中有一个对应的点:它可以如下地简单得到,即从O出发,按水平方向(即沿x轴)移动"a"步,然后按竖直方向从x轴上的点"a"移动"b"步.上图标出了点$(3,2)$.反之,如果给定了一个笛卡儿平面,此平面中任意点P,存在与P关联的一对实数.天才笛卡儿的轻轻一举便产生了把任意函数转换为一个二维图形或图像的方法.

如果把已知函数F写为

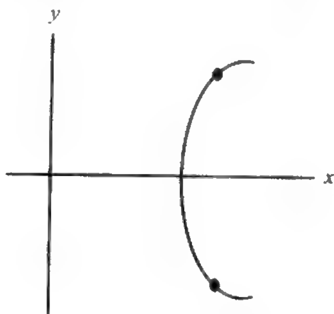
$$y = F(x),$$

这只不过意味着对每个实数x,存在由函数F的规则决定的唯一实数$y = F(x)$.如果人们描画出当x通过各实数时的点$(x, f(x))$,则得到了F的**图像**.称$y = F(x)$为此图像的**方程**.

例 1.10　考虑立方函数$y = x^3$.让我们画出对应于$x = 0,1,2,-1,-2$的下面5个点,如下左图.在画出更多的点,将其填满时,我们得到了图像,如下右图:



注　每个函数有一个图像,但是并不是每个图形均来自一个函数.例如图



便不能对应于一个函数,这是因为对一个 x 值常常有两个 y 值. 这破坏了函数定义中的唯一性.

§1.3 的习题

(1 ~ 9) 在你的 CAS 上使用绘图功能来输出所有 §1.1 的习题(1) ~ (9) 的图像.

(10) 在你的 CAS 上构造 $f(x) = x^2$. 给出函数 $y = f(x)$, $y = f(x+1)$, $y = f(x+10)$ 和 $y = f(x-10)$ 的图像. 出现了什么情况?

(11) 在你的 CAS 上构造 $f(x) = x^3$. 给出函数 $y = f(x)$, $y = f(x+1)$, $y = f(x+10)$ 和 $y = f(x-10)$ 的图像. 出现了什么情况?

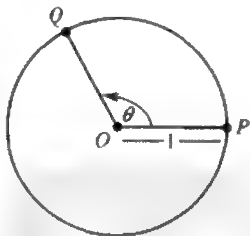
(12) 在你的 CAS 上构造 $f(x) = x^2$. 给出 $y = f(x)$, $y = f(x)+1$, $y = f(x)+10$ 和 $y = f(x)-10$ 的图像. 出现了什么情况?

(13) 在你的 CAS 上构造函数 $f(x) = x^3$. 给出 $y = f(x)$, $y = f(x)+1$, $y = f(x)+10$ 和 $y = f(x)-10$ 的图像. 出现了什么情况?

1.4 三角函数和指数函数

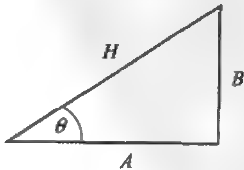
本节简要地复习一下三角函数 $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ 和 $\tan(\theta)$ 以及指数函数 a^x 的正式定义.

考虑一个圆心在 O,半径为 1 的圆. 设 OP 为右图中一条固定的参照直线,它被水平地画出. 按定义,如果弧 PQ 的长度为 l,则定义角 θ 具有度量 l **弧度**. 由于此圆的全周长为 2π,故对应一个完全旋转(360°)的角具有度量 2π 弧度. 类似地,直角(90°)具有 $\pi/2$ 弧度. 我们也容许有任意大度量的角,例如 6π 弧度的一个角对应于 3 个完全旋转.



设 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. 考虑一个直角三角形,它的斜边的长为 H,直角边长为 B 和 A(其中,我们假设长度为 A 的边与 θ 相邻). 以这样安排的符号我们定义下列的**三角函数**:

$$\sin(\theta) = \frac{B}{H}, \cos(\theta) = \frac{A}{H}, \tan(\theta) = \frac{B}{A}.$$



(在一个完整的三角学的表述中还要讨论函数

$$\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}, \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}, \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}.$$

本节只想对其作简短回顾,后三个函数在本节不加细说.)首先要注意的是这些定义只依赖于角 θ:如果此角出现在两个不同的直角三角形中,则这些三角形必然相似,因而我们便有了各种比值的等式,即

$$\frac{A}{H}=\frac{A'}{H'},\frac{B}{H}=\frac{B'}{H'},\frac{B}{A}=\frac{B'}{A'}.$$

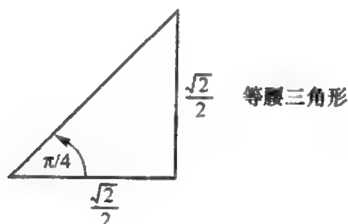


另一个重要的观察结果是我们可以把毕达哥拉斯定理 $A^2+B^2=H^2$ 转换为恒等式

$$\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1.$$

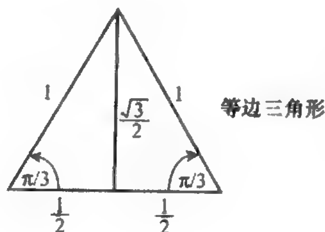
例 1.11 $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$

这些计算由下面的图推出.



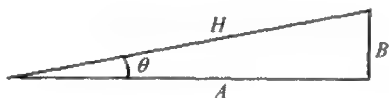
例 1.12 $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}.$

这些等式还是从一个图得到:



例 1.13 $\cos(0) = 1, \sin(0) = 0, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

我们将讨论等式 $\cos(0) = 1$ 和 $\sin(0) = 0$,而将剩下的两个留给读者. 设 θ 为一非常小的角.



当 θ 越变越小时,A 与 H 的长度越来越接近而且 θ 对边的长度也越来越小. 因此

$$\cos(\theta) = \frac{A}{H}$$

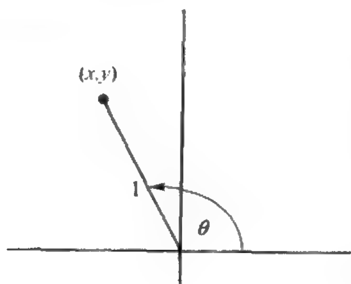
当 θ 趋向 0 时必定趋向 1. 相似地

$$\sin(\theta) = \frac{B}{H}$$

当 θ 趋向 0 时也趋向 0. 这个论证的准确阐述需要极限的概念,而此概念将在 §4.1 中详尽地讨论.

要完成对三角函数的简略讨论,我们还必须把函数的定义域扩大到包含 $\theta > \pi/2$ 的那些角. 为此考虑笛卡儿平面上的 θ,此平面包括了 x 轴和一条中心在原点长度为 1 的线段.

设 (x,y) 为此线段的端点的坐标.

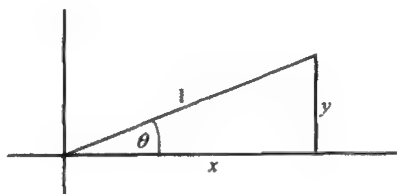


我们定义

$$\sin(\theta) = y, \cos(\theta) = x, \tan(\theta) = \frac{y}{x}.$$

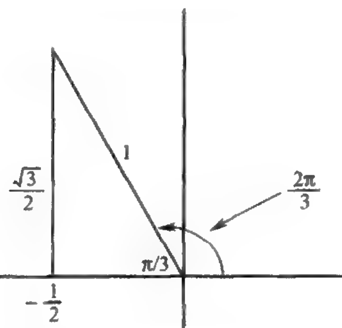
注 从下面的图示中可以看出,此定义与先前对 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ 时的定义是

一致的.

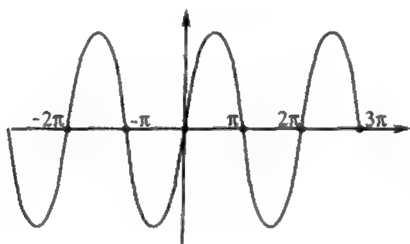


例 1.14 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}.$

最后的等式由下面的第二象限图示推导出.



例 1.15 函数 $y=\sin(x)$ 的图像描绘于下.



可清楚看到,在每个完全旋转(即在一个 2π 弧度的角)之后,图像必定自身重复出现.

我们以引进非常重要的**指数函数**来结束本章. 固定一个实的正数 a 并考虑在有理数集合(记作$\mathbb{Q}$)上的函数,

$$x \longmapsto a^x,$$

其中 $x \in \mathbb{Q}$. 当 x 为一个正整数时 a^x 的意思只不过是 a 自乘 x 次. 例如 $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$. 我们定义 $a^{-1} = \frac{1}{a}$,更一般地,对一已知的正整数 x,

$$a^{-x} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{x\text{次}}}$$

当令 $a^0 = 1$ 时,我们便看到了指数函数的引人注目的等式:对任意整数 x 和 y,

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}. \tag{1.1}$$

问题 在 x 不是整数时应该如何定义 a^x?

我们要在保持等式(1.1)成立的情形下扩大此定义. 事实上,这个等式强行规定了应当如何进行扩充. 例如,如果我们已经定义了 $a^{\frac{1}{5}}$,那么当 $a^{\frac{1}{5}}$ 自乘 5 次必须得出 a,即

$$a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)} = a^1 = a.$$

因此 $a^{\frac{1}{5}}$ 是 a 的 5 次根,即 $a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$. 类似地,对已知的任意数 m,

$$\underbrace{a^{\frac{m}{n}} \cdot \cdots \cdot a^{\frac{m}{n}}}_{n\text{次}} = a^{\left(\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}\right)} = a^m,$$

从而我们一般的结论是

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

其中我们记起,按约定,当 n 为偶数时我们选取正的 n 次实根.

§1.4 的习题

计算下列值. 用你的 CAS 检验你的答案.

(1) $\cos(3\pi/2)$. (2) $\sin(6\pi)$. (3) $\tan(2\pi)$. (4) $\cos(4\pi/3)$.
(5) $\sin(4\pi/3)$. (6) $\tan(5\pi/3)$. (7) $\sin(5\pi/3)$. (8) $\cos(5\pi/3)$.
(9) $\sin(3\pi/4)$. (10) $\cos(3\pi/4)$. (11) $\tan(3\pi/4)$. (12) $\cos(5\pi/4)$.
(13) $\sin(5\pi/4)$. (14) $\tan(7\pi/4)$. (15) $\cos(7\pi/4)$.

(16) 在你的 CAS 上计算 $10^{3/4}$, $15^{11/13}$, $100^{6/7}$,精确到第 10 位小数.

(17) 在你的 CAS 上计算 $(10^{3/4})^4$, $(15^{11/13})^{13}$, $(100^{6/7})^7$.

(18) 证明 $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

(19) 用你的 CAS 作函数 $y = \cos(x)$ 的图像. 讨论此图像的对称性以及与 $\sin(x)$ 图像的相似处.

(20) 用你的 CAS 作函数 $y = \tan(x)$ 的图像. 此图像的对称性如何?

(21) 证明 $\cos(\theta) = \sin(\pi/2 - \theta)$.

(22) 证明 $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$ 以及 $\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$.

第一章的附加习题

(1) 将正方形面积表达为其边长 x 的一个函数.

(2) 将立方体体积表达为其边长 x 的一个函数.

(3) 将圆的面积表达为半径的和周长的函数. 用你的 CAS 作这两个函数的图像.

(4) 假定你的信用卡上有一笔未偿清的结欠\$1 025,而你不打算用它再去进行购买. 信用卡公司课以月利为 1% 并要求每月至少要偿还\$50. 把所欠总数表示为已过去的月数的函数. 在你的 CAS 上构造此函数并确定出完全偿清这笔结欠需要多少个月.

求下列函数的定义域和值域. 用你的 CAS 作出每个函数的图像.

(5) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$.　　(6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

(7) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-16}{x+16}}$.　　(8) $f(x)=\dfrac{1}{1-3\sin(x)}$.

(9) (a) 设 $f(x)=x+6$, $g(x)=x^2$. f 和 g 的值域与定义域是什么?

(b) 确定 $g(f(x))$ 和 $f(g(x))$. 它们各自的值域和定义域是什么? f 和 g 能否互换?

在下面的习题中,确定方程式是否定义了 y 为 x 的函数,或 x 为 y 的函数,还是两者都是或两者都不是. 用你的 CAS 作出方程解集合的图,这可能对你有所帮助.

(10) $3x-6y=10$.　　(11) $x^2+y^2=25$.　　(12) $xy^2=2$.

(13) $\dfrac{2-2x}{1+y}=1$.　　(14) $x^2y^3+4=8$.　　(15) $\dfrac{xy}{2-xy}=1$.

(16) $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ 和 $\tan(\theta)$ 各自的定义域和值域是什么?用你的 CAS 构造函数

$$f_\beta(\theta)=\cos(\theta+\beta),$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$,而 β 为一固定数. 作 $\beta=\dfrac{\pi}{6}$ 时此函数的图像.

(17) 你能否导出用 $\cos(\theta)$ 和 $\sin(\theta)$ 表示出的 $\cos(2\theta)$ ($\sin(2\theta)$) 的公式?(提示:将轴旋转 θ 角.) 用同样的方法你可以得到 $\cos(\theta+\beta)$ 和 $\sin(\theta+\beta)$ 的公式. 取 $\beta=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}$,而 θ 不必等于 β,在你的 CAS 上来验证这个公式.

(18) 用你的 CAS 对许多个固定的 β 画出函数 $f(\theta)=\sin(\beta)+\sin(\theta)$ 的图形.

(19) 用你的 CAS 作 $f(\theta)=1+\tan^2\theta$ 的图像. 作 $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ 的图像. 你注意到什么了?你能推导出什么等式?

(20) 在你的 CAS 上作函数 $f(x)=2^x$ 的图像. 另外,利用你的 CAS 对 $h=0.1,0.025,0.01,0.005,0.0025,0.001$,计算 $\dfrac{2^h-1}{h}$ 的值. 你注意到了什么?

第二章　函数的代数

2.1　对代数的非严格介绍

由于代数的准确定义冗长而且是专业性的，我们将局限于一种非正式的讨论，这对我们的需求已足够了. 简短地说，一个代数由一个集合 $\mathscr{A}$ 连同 $\mathscr{A}$ 上一组运算组成：$\mathscr{A}$ 上的一个运算让人们对 $\mathscr{A}$ 中任取两个元素能生成 $\mathscr{A}$ 中的第三个（唯一的）元素. 每个人都熟悉的代数是实数 $\mathbb{R}$ 的代数. 其运算为加法和乘法，连同这些运算的逆，即减法和除法. $\mathbb{R}$ 是众所周知的（依此观点似乎是初等的），然而实际上存在着具有复杂和陌生形式的代数，其运算远远不同于 $\mathbb{R}$ 中所发现的那些运算.

例 2.1　最简单的代数之一是两个符号 0 和 1 的二进制代数，

$$\mathscr{A} = \{0,1\}.$$

我们定义其运算如下：

$$0+0=0,\quad 0+1=1,\quad 1+0=1,\quad 1+1=0;$$
$$0-0=0,\quad 0-1=1,\quad 1-0=1,\quad 1-1=0;$$
$$0*0=0,\quad 0*1=0,\quad 1*0=0,\quad 1*1=1.$$

于是 $\mathscr{A}$ 是一个具三个运算 $+$，$-$，$*$ 的代数. 这里令人惊奇的事只有 $1+1=0$. 可以这样解释：如果我们将 0 和 1 等同于一个开关的位置；运算 $+1$ 当作点击开

关而 0 当作不动. 显然点击两次总起来又回到原来的位置,即 $1+1=0$. 这个代数是计算机电路学的基础.

§2.1 的习题

(1) 在你的 CAS 上构造一个加法函数,其中定义域$(A)=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$,且值域$(A)=\{0,1\}$,它满足

$$A((0,0))=0, A((0,1))=1, A((1,0))=1, A((1,1))=0.$$

(2) 用你在上一个习题中构造的加法函数计算 $1+1+1$ 和 $1+1+1+1$.

2.2　函数的代数

已知两个函数 $f(x)$, $g(x)$,我们可以对它们进行加(减) 以得到一个新的函数

$$f(x)\pm g(x).$$

类似地,把它们相乘我们可得到

$$f(x)\cdot g(x).$$

使这些运算确有定义的唯一必须的要求是 f 和 g 的定义域应该一致,而且加、减、乘运算在 f 和 g 的值域中均有效. 显然,如果我们假定

$$定义域(f)=定义域(g)=\mathbb{R},$$

$$值域(f),值域(g)\subseteq\mathbb{R},$$

则一切均顺利可行. 我们可以作函数相除吗?假定我们不除以 0 的话答案是肯定的. 最后,如果对变量 x 代入一个实数值,比值

$$f(x)/g(x)$$

在假设 $g(x)\neq 0$ 时是可以算出来的.

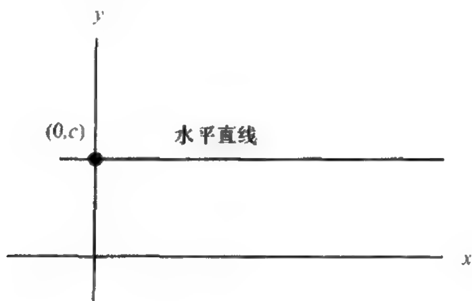
问题　最简单的函数是什么?

最简单的函数是常值函数

$$f(x)=c,$$

其中 c 是一个固定的实数. 这里的 $f(x)$ 对任意的 x 取相同的值 c. 这个函数的图像为水平直线,它交 y 轴于点$(0,c)$.

零函数 $f(x)=0$ 的图像只不过是 x 轴. 这个函数是函数代数关于加法的**单位元素**,即把任意函数加到零函数上给出了原来的函数. 注意,零函数是具有这个性质的唯一的函数. 类似地,函数 $f(x)=1$ 是函数代数关于乘法的单位元素.



注意，$f(x)=1$ 的作用就像数 1 在通常的实数代数中那样.

看起来似乎函数代数在结构上非常类似于实数代数. 然而令人惊讶的事在等着我们. 函数代数包含了两个多出来的运算！大自然赋予这个代数比实数代数有更为丰富的结构，就像我们将看到的，这导致了一些引人入胜的发展.

定义 已知两个函数 f,g 使得值域(g)包含在定义域(f)中. 我们可以形成函数的**复合**，记为 $f\circ g$，它是一个由下面规则定义的新函数：

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),$$

即函数的函数.

例 2.2 设 $f(x)=x^2, g(x)=x+1$，则

$$f(g(x))=g(x)^2=x^2+2x+1,$$
$$g(f(x))=f(x)+1=x^2+1.$$

这个例题表明，一般情形下

$$f\circ g\neq g\circ f,$$

这是一个在实数代数中对加法或乘法都没有的现象.

例 2.3 设

$$f(x)=\frac{x^3-7x}{x^2+1},\quad g(x)=x^4+1.$$

然后运用我们的 CAS，有

$$f+g=x^4+1+\frac{x^3-7x}{x^2+1},$$

$$g-f=x^4+1-\frac{x^3-7x}{x^2+1},$$

$$f/g=\frac{x^3-7x}{(x^2+1)(x^4+1)},$$

$$f\circ g=\frac{(x^4+1)^3-7(x^4+1)}{(x^4+1)^2+1},$$

$$g\circ f=\left(\frac{x^3-7x}{x^2+1}\right)^4+1.$$

例 2.4(种群函数) 这个例子(应归于物理学家费根堡姆(M. Feigenbaum))表示这样一个系统,它对一个大范围的初始条件均表现正常和平稳,但在某些判别值处突然变成混沌的.

固定一个实数 $0\leqslant r\leqslant 4$,并设 $P_r(x)=r\cdot x(1-x)$ 表示一个种群函数,其中如果 x 表示在一已知年度某个物种的种群数(为简单起见,我们取 x 为 0 到 1 之间的数,而真正的种群数是 x 的一百万倍),于是 $P_r(x)$ 表示在随后的年度里的种群数. 随时间推移,种群会发生什么情况?容易看出,在第 n 年度,种群数由

$$\underbrace{P_r\circ P_r\circ\cdots\circ P_r}_{n\text{次}}$$

给出,即 P_r 自身复合 n 次.

§2.2 的习题

(1) 设 $f(x)=x^3+2x+1$, $g(x)=x^2-3$. 计算 $f+g, g-f, f/g, f\cdot g, f\circ g$ 和 $g\circ f$.

(2) 设 $f(x)=x^4-1$, $g(x)=3x^2-2x+1$. 计算 $f+g, g-f, f/g, f\cdot g, f\circ g$ 和 $g\circ f$.

(3) 设 $f(x)=x^2+2$, $g(x)=3^x$. 计算 $f+g, g-f, f/g, f\cdot g, f\circ g$ 和 $g\circ f$.

(4) 设 $f(x)=2^{1-x}$, $g(x)=2^{4x-3}$. 计算 $f\circ g$ 和 $g\circ f$.

(5) 设 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2$. 计算 $f\circ g$ 和 $g\circ f$.

(6) 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $g(x)=x^3$. 计算 $f\circ g$ 和 $g\circ f$.

(7) 设 $f(x)=\cos(x-1)$, $g(x)=x^4+2$. 计算 $f\circ g$ 和 $g\circ f$.

(8) 设 $f(x)=\sqrt{x}$. 计算 $f\circ f\circ f\circ f$.

(9) 在例2.4(种群函数)中,设 $r=2$. 证明种群数最终稳定于500 000,即取出 x 的一个值,如 $x=0.2$,计算 $P_2(0.2)$, $(P_2\circ P_2)(0.2)$, $(P_2\circ P_2\circ P_2)(0.2)$, …,并指出这些数收敛于 0.5. 设 $r=1$. 证明此种群最终将灭绝,即它稳定于0.

(10) 设 $r=3.2$. 指出这种情形中种群数最终在两个值0.5和0.8之间交替取值. 试一试 r 的一个稍大的值,但它小于3.57. 发生了什么?现在再试试 $r=3.57$,并指出种群数以一种混沌的方式增长到无穷. 当 r 进一步增大时会发生什么?

2.3 单位元和反函数

回想一下,我们曾看到函数 $f(x)=0$ 和 $f(x)=1$ 分别是关于加法和乘法运

算的单位元(这些是类比于实数代数中的数0和1). 由此有下面的

问题 函数复合运算的单位元是什么?

答案是恒等函数

$$I(x) = x.$$

这可由下面等式立刻得到:

$$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x),$$
$$(I \circ f)(x) = I(f(x)) = f(x),$$

其中f为任一函数,也即是

$$(f \circ I) = (I \circ f) = f.$$

例2.5 当我们在CAS上定义$I(x) = x$, $f(x) = \cos(x^3 - 1)$,我们可容易验证$I \circ f = f \circ I$.

正如我们在前面所看到的,函数的乘法运算的逆(当它存在时)是除法运算,即f乘以$\frac{1}{f}$产生乘法单位元:

$$f \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \cdot f = 1.$$

类似地,对于加法运算,其逆运算是减法,即f加上$-f$产生加法单位元:

$$f + (-f) = (-f) + f = 0.$$

问题 相伴于函数复合的逆运算是什么?

定义 已知函数f, f的**逆**(也称为f的反函数)记作f^{-1},是这样一个函数,它的定义域是集合值域(f),而其值域是集合定义域(f),它由下面的规则定义:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I,$$

其中I为复合的单位元函数. 如果不能定义满足上述规则的一个函数f^{-1},我们则说f^{-1}不存在.

警示 一般来说,

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f},$$

认识到这一点是很重要的.

一个函数的逆什么时候存在?要回答这个问题我们需要一个重要的概念.

定义 称一个函数$f: A \longrightarrow B$是**一对一的**是指,如果对值域(f)中每个元素b,存在定义域A中一个**唯一**的元素a,使得$f(a) = b$.

我们现在可以识别出哪些函数是可逆的,即有一个逆元.

命题2.6 一个函数有逆当且仅当它是一对一的.

证明 在 §2.3 的习题5中,留给读者.

例 2.7 函数 $h(x)=\frac{1}{2}x$ 是倍函数 $d(x)=2x$ 的逆(它明显是一对一的),这是由于

$$d\circ h(x)=d(h(x))=d\left(\frac{1}{2}x\right)=x,$$

和

$$h(d(x))=h(2x)=x.$$

例 2.8 设 a,b 为两个任意给定的实数,其中 $a\neq 0$. $f(x)=ax+b$ 的逆是什么?

在找寻反函数前我们首先必须检验 $f(x)$ 是一对一的. 事实上假设 $a\neq 0$ 保证了 f 是一对一的:如果 x_1 和 x_2 是不同的数,则在 $a\neq 0$ 时 $ax_1+b\neq ax_2+b$. 现在回到求 f 的逆;一个函数 $g(x)$ 若有

$$f(g(x))=x.$$

则是 $f(x)$ 的逆. 这时我们得到等式

$$ag(x)+b=x,$$

即

$$f^{-1}(x)=g(x)=(x-b)/a.$$

例 2.9 $f(x)=x^2+5$ 在无穷区间 $x\geqslant 0$ 上的逆是什么?

注意到在无穷区间 $x\geqslant 0$ 上 $f(x)$ 是一对一的;现在我们来找一个函数 $g(x)$,使得 $f(g(x))=x$. 由于 $f(x)=x^2+5$,我们有

$$f(g(x))=g(x)^2+5=x,$$

解出 $g(x)$ 我们便得到了 $f(x)$ 的逆,

$$f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x-5}.$$

注 在找到各种函数的逆时我们应知道,一旦 f^{-1} 存在则它是唯一的. 可以这样看出:设 g 是 f 的另一个逆函数. 于是由定义,$g\circ f=f\circ g=I$,我们便得到

$$f^{-1}=(g\circ f)\circ f^{-1}=g\circ(f\circ f^{-1})=g.$$

§2.3 的习题

(1) 证明平方函数与平方根函数形成一对逆函数.

(2) 证明立方函数与三次根函数形成一对逆函数.

(3) 用 CAS 验证 ln 函数与 exp 函数形成一对逆函数.

(4) 证明函数 $f(x) = x^N$ 的逆是 $f^{-1}(x) = x^{1/N}$.

(5) 验证命题2.6.

(6) 已知函数 f 是一对一的,证明 f^{-1} 的反函数是原来的函数.

(7) 设 $y = mx + b$ 是一条直线的函数. 其反函数是什么?它是否还是一条直线?

(8) 对函数 $f(x) = x^N + a$ 求出 $f^{-1}(x)$.

(9) 求一个函数 $f(x)$,使其为自己的反函数,即 $f(x) = f^{-1}(x)$.

(10) 函数 $\cos(x)$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 是一对一的. 因此它有一个确有定义的逆,记为 $\arccos(x)$,其定义域为 $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 计算 $\arccos(1)$,$\arccos(-1)$,$\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$,$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$,$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$和 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(11) 函数 $\sin(x)$ 在区间 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 是一对一的. 因此它有一个确有定义的逆,记为 $\arcsin(x)$,其定义域为 $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 计算 $\arcsin(1)$,$\arcsin(-1)$,$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$,$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$,$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(12) 证明对 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 有 $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. **提示**:回想对 $-\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$ 有

$$\cos(u) = \sqrt{1-\sin^2(u)}$$

这是因为 $\cos(u)$ 在此区间为正.

第二章的附加习题

(1) 将 $h(x) = \tan(x^5)$ 表示为两个函数 f 和 g 的复合.

(2) 将 $h(x) = \frac{2}{6+\cos(x)}$ 表示为两个函数 f 和 g 的复合.

(3) 将 $h(x) = \frac{2\sin^2(x)}{6+\cos^2(x)}$ 表示为两个函数 f 和 g 的复合.

(4) 在你的 CAS 上作下面函数的图像:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - 1, & \text{如果 } x \leqslant 3, \\ x^2 - 6x + 9, & \text{如果 } x > 3. \end{cases}$$

f 有逆吗?如果有,求出它. **提示**:$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

(5) 用你的 CAS 作 e^x 和 $\ln x$ 的图像. 然后作函数 $f(x) = x$ 的图像. 你留意到了什么?

(6) 设

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}.$$

f的定义域是什么?f的值域是什么?f的逆是否存在?找出使f和f^{-1}都有定义的最大区域.用你的 CAS 在那个区域上作f^{-1}的图像.

(7) 一般情形下,是否$f\circ g = g\circ f$?

(8) 是否有时$f\circ g = g\circ f$成立?

(9) 如果$f(3x+1) = \dfrac{x}{x^2+1}$,求$f(x)$(提示:令$z = 3x+1$,然后求出$f(z)$).

(10) 如果$f(x+1) = x^2 - 6x + 10$,求$f(x)$.

(11) 求函数f和g,使得$f(g(x)) = \sin(\sqrt{x^2+1})$.

(12) 设$f(x)$只在$x = 0$时有$f(x) = 0$,设$g(x) = x^3 - 6$. 对什么x值有$f\circ g(x) = 0$?

(13) 如果对x在f的定义域中有$f(x) = f(-x)$,则称此函数为偶的;如果$f(x) = -f(-x)$,则称其为奇的. 用你的CAS作函数$f(x) = x^2 - 1$的图像. $f(x)$是偶的还是奇的?$f(x)$有何种几何性质?

将下列函数按偶,奇,或两者均不是分类(其定义在习题(13)中已给出)并用你的 CAS 作其图像.

(14) $f(x) = |x|$.

(15) $f(x) = \sin(x)$.

(16) $f(x) = |x-2| + 3$.

(17) $f(x) = \begin{cases} -x-2, & \text{如果 } x \leqslant -2, \\ -x^2+4, & \text{如果 } -2 < x < 2, \\ x-2, & \text{如果 } x \geqslant 2. \end{cases}$

(18) 如果$f(x)$为奇函数,$g(x)$应该满足什么条件能使得$g\circ f(x)$为偶?为奇?

(19) 设$f(x) = (x-a)^2$. 用你的 CAS 对一些给定的a作图像. $f(x)$具有什么几何性质?现假设$g(x) = e^x$,$g\circ f(x)$是否具有与$f(x)$一样的几何性质?代数地表示这个性质.

(20) 设a为常数,并假设f是一个函数,它对所有的x满足

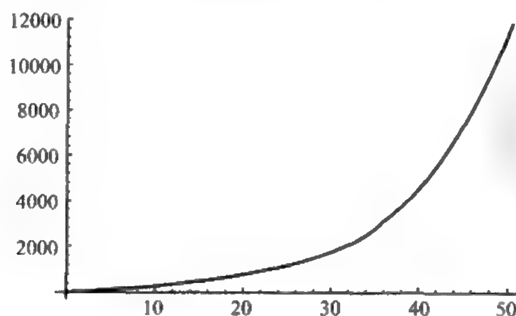
$$f(a-x) = f(a+x).$$

f的图像必具有什么几何性质?

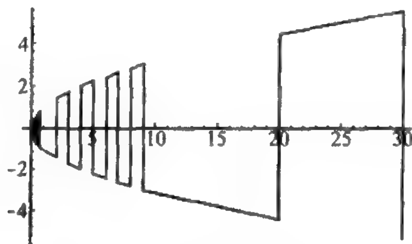
第三章　直线、圆和曲线——回顾

3.1　直线

在 §1.3 中介绍的笛卡儿坐标系使我们能将函数当作图像来形象化地看待. 大多数出现在自然界(即物理,生物,经济等)的函数看起来像曲线. 例如高利贷函数(见 §1.2 的例1.3)的图像看起来像下图.



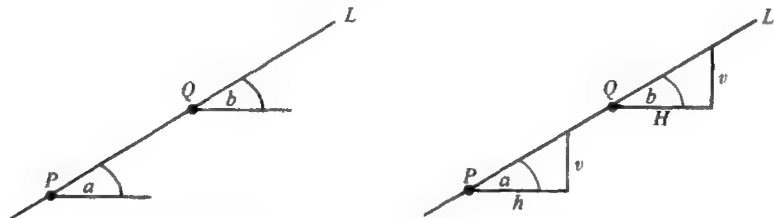
更加复杂的函数,像新设计的平方根函数(参见 §1.2 的例1.8)不能被形象地看成一条光滑曲线.



研究函数的一个强有力的方法是运用与其相伴的图像的几何所推导出的信息. 那些其图像是已很熟悉的几何图形的函数可以证明具有特别美妙的性质;这里所说的那种几何图形包括直线,半圆等. 我们挑选出这些特殊的函数.

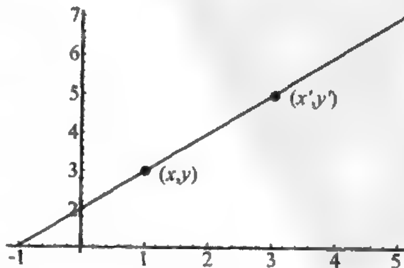
问题 3.1　确定那些图像为直线的所有可能的函数.

这个问题的解依赖于经典的欧氏几何的一个基本原理:任一直线 L 与任意水平直线交成相同的角. 在下面的图中,直线 L 与两条水平线相交(交于 P 和 Q 点),并形成了角 a 和 b,它们必定相等.



于是当我们形成两个直角三角形(沿上图中所画出的水平线)时,由于角 a 和 b 相等,a 的正切 $\tan(a) = \frac{v}{h}$ 必定等于 $\tan(b) = \frac{V}{H}$:

$$\frac{v}{h} = \frac{V}{H}.$$



(竖直距离与水平距离的) 比值$\frac{v}{h}$ 叫做此直线的**斜率**. 由上面的讨论知道,直线 L 的斜率是能明确定义的(即与点 P 无关). 注意到此概念出现在两千多年前的与金字塔建筑有关的古埃及纸草书中是颇有意思的.

如果一条直线被画在笛卡儿平面上，而(x,y)，(x',y')为直线上的任意两个点，那么，不参照任何角，我们有其他选择：

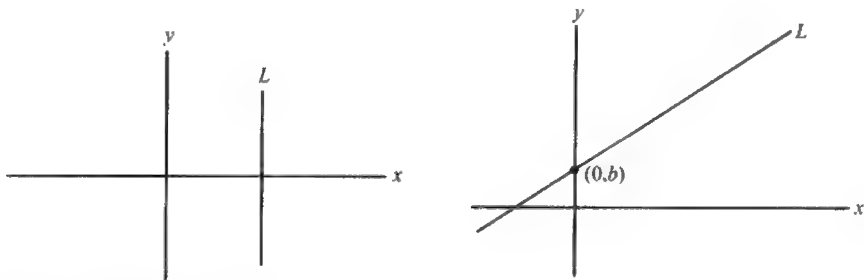
定义 通过不同点(x,y)和(x',y')的直线的斜率定义为

$$\frac{y'-y}{x'-x}.$$

警示 如果直线L不是竖直的，则此定义是明确的. 在L是竖直的情况下，L上的每个点对于x轴都相等，于是在斜率的计算中我们将会除以0. 具有启发性的说法是一条竖直线具有无穷斜率（注意，一条竖直线从不是一个函数的图像）.

我们现在集中注意于具有有限斜率m的一条任意直线. 由于L不是竖直的，它必定与y轴交于某个点$(0,b)$. 如果(x,y)为L上另一个任意点，则我们有

$$m=\frac{y-b}{x-0}.$$



简化后我们得到有名的方程

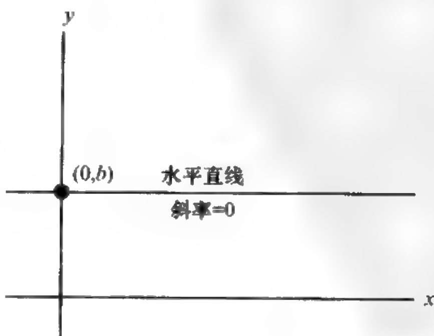
$$y=mx+b.$$

总起来我们已经证明了

命题3.2 *其图像为一条直线的每个函数必定有形式*

$$F(x)=mx+b,$$

其中m为此直线的斜率，$(0,b)$为此直线与y轴的交点.



注 水平直线是一个非常重要的例子. 这时斜率$m=0$，且此函数具形式

$$F(x)=b,$$

其中$(0,b)$为此直线与y轴的交点.

例 3.3 求直线$2x - 3y = 5$的斜率和y - 截距.

从原来的方程开始,我们用一点初等代数来重写此方程为$3y = 2x - 5$,或$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$. 现在我们看出了此直线的斜率为$\frac{2}{3}$,而$y$ - 截距为$b = -\frac{5}{3}$.

例 3.4 考察两条直线$y = 3x + 2$和$y = 2x - 1$,它们相交于何处?

交点(x,y)同时位于两直线上. 要求此点,我们必须求解含有两个未知数的两个方程

$$y - 3x = 2,$$
$$y - 2x = -1.$$

将它们相减,得到$-x = 3$;将其代入任一直线方程,求得$y = -7$.

例 3.5 求通过点$(1,3)$和$(2,4)$的直线方程.

此直线的斜率为$m = \frac{4-3}{2-1} = 1$. 因此其方程有形式$y = x + b$. 因为点$(1,3)$在直线上,我们可代$x = 1$和$y = 3$到方程$y = x + b$中产生了$3 = 1 + b$,即$b = 2$. 我们结论是,此直线的方程由$y = x + 2$给出.

§3.1 的习题

(1) 求直线$6x + 2y = 11$的斜率和y - 截距. 在你的 CAS 上作此直线的图像.

(2) 求直线$x - 3y = \pi$的斜率和y - 截距. 在你的 CAS 上作此直线的图像.

(3) 求两条直线$3x - 2y = 1$和$2x + y = 5$的交点. 在你的 CAS 上作出这些直线的图像.

(4) 考虑两条任意直线

$$L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

这些直线交于何处?证明如果$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$,则L_1与L_2相交. 否则它们平行.

(5) 求通过两点$(-2,3)$和$(1,-2)$的直线方程. 在你的 CAS 上画出这些点和通过这些点的直线.

(6) 用点$(1,4)$和$(2,-3)$重复习题(5).

(7) 用你的 CAS 作两条直线

$$L_1: 2x - 3y = 13,$$
$$L_2: 3x + 2y = 7$$

的图像. 证明它们相互垂直. **提示**:利用如下事实:两条直线如果它们的斜率的乘积为-1则它们垂直.

(8) 两条直线如果永不相交则说它们平行. 证明任两条具相同斜率的直线平行.

(9) 验证事实:任两条具斜率 m_1 和 m_2 的直线当 $m_1 \cdot m_2 = -1$ 时垂直.

(10) 决定三个点(1,3),(-1,5),(9,-4) 是否同在一条直线上.

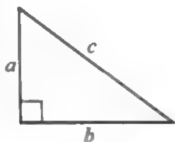
(11) 求通过(-1,2) 并垂直于直线 $2x-3y=4$ 的直线方程.

(12) 求以(1,3) 和(4,-1) 为端点的线段的垂直平分线的方程. 在你的 CAS 上作此线段和它的垂直平分线的图像.

3.2 圆

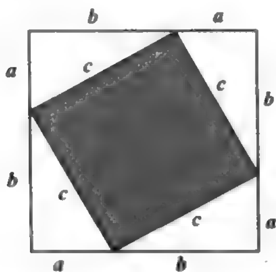
问题 3.6 决定其图像为半圆的函数.

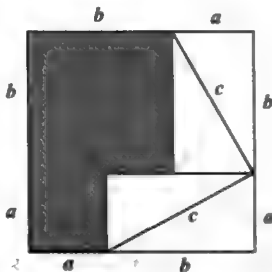
我们以回顾毕达哥拉斯定理来着手解决这个问题. 毕达哥拉斯定理说,在一个斜边长为 c,直角边长为 a,b 的直角三角形中,我们有



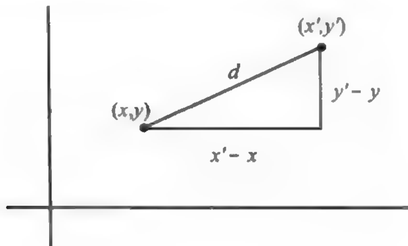
$$a^2+b^2=c^2.$$

毕达哥拉斯定理的证明由下面的图示给出:





这个古老的公式使我们能够求出笛卡儿平面上任两个点(x,y) 和(x',y')



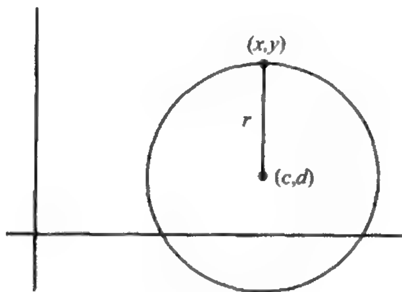
间的距离 d,有公式

$$d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2,$$

或者

$$d = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

现在,半径为 r,中心在点(c,d) 的圆由那些距离(c,d) 为 r 的点(x,y) 的轨迹(集合)构成.



由此有

$$r^2 = (x - c)^2 + (y - d)^2,$$

从而

$$y - d = \sqrt{r^2 - (x - c)^2},$$

或

$$y = \sqrt{r^2 - (x - c)^2} + d.$$

依照标准的约定,在上面使用了正平方根我们得到:

命题 3.7 其图像为半径 r,中心在(c,d) 的半圆的每个函数必定具有下面两种形式之一:

$$F(x) = \sqrt{r^2 - (x - c)^2} + d$$

或者

$$F(x) = -\sqrt{r^2 - (x - c)^2} + d.$$

概括起来说,我们已经得到了一个出色的结论,即如果函数 F 不具有形式 $F(x) = mx + b$,则其图像必定是弯曲的!它不能是一条直线. 更进一步,如果 F 不是形式

$$F(x) = \pm\sqrt{r^2 - (x - c)^2} + d,$$

则其图像不可能是圆.

例 3.8 求半径为 5 中心在$(1,3)$ 的一个圆的方程,构造一个函数,使它的

图像为半径 5 中心(1,3) 的一个半圆.

这个圆的方程就是$(x-1)^2+(y-3)^2=25$. 图像为半圆的函数为

$$F(x)=\sqrt{25-(x-1)^2}+3.$$

例 3.9 计算点(1,1) 和(5, -2) 之间的距离.

距离 d 由

$$d=\sqrt{(5-1)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{25}=5$$

给出.

例 3.10 求点(4,1) 和直线 $y=3x-1$ 之间的最短距离.

要解这个问题我们必须先求出经过(4,1) 并垂直于直线 $y=3x-1$ 的直线方程. 一旦做到这点我们必须找到这两条直线的相交点 P,于是 P 与(4,1) 间的距离便给出了最终的答案. 由 §3.1 的习题(9), 我们知道任一条垂直于 $y=3x-1$ 的直线必具斜率 $-\frac{1}{3}$,因此取形式 $y=-\frac{1}{3}x+b$. 由于(4,1) 在此直线上,我们便知道所求直线由 $y=-\frac{x}{3}+\frac{7}{3}$ 给出. 这两条直线的交点由令 $3x-1=-\frac{x}{3}+\frac{7}{3}$ 算出. 得出 $x=1$,从而所求 P 点为 $P=(1,2)$. 要完成此习题我们还要计算(1,2) 与(4,1) 间的距离:$d=\sqrt{(4-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$. 结果是:$\sqrt{10}$ 是(4,1) 与直线 $y=3x-1$ 间的最短距离.

§3.2 的习题

在下面的 5 个习题中求圆的方程,这些圆中心在 P,半径为 R. 用你的 CAS 作上半和下半圆的图像.

(1)$R=1, P=(1,3)$.

(2)$R=3, P=(-1,5)$.

(3)$R=10, P=(-3,-2)$.

(4)$R=5, P=(1.3,-2.1)$

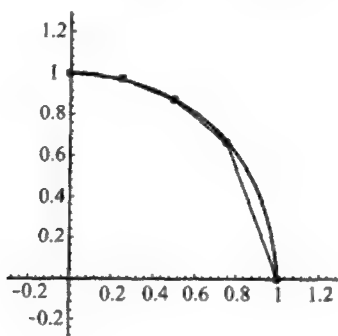
(5)$R=2, P=(\pi,-1.03)$.

(6) 计算点 P_1 与点 P_2 之间的距离:$P_1=(1,3), P_2=(3,-1)$;
$P_1=(0,1), P_2=(-1,-3), P_1=(2,3), P_2=(-2,11)$.

(7) 求点(1,3) 和直线 $2x-4y=-1$ 间的最短距离.

(8) 求点(-1,2) 和直线 $y=5x-2$ 间的最短距离.

(9)（π 的近似值）以毕达哥拉斯做过的方式对 π 进行估值.



在四分之一的圆上选取下面 4 个点：

$$(0,1),\left(\frac{1}{4},\sqrt{1-\frac{1}{16}}\right),\left(\frac{1}{2},\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right),\left(\frac{3}{4},\sqrt{1-\frac{9}{16}}\right).$$

这些点对于 x 轴是等间隔的. 把这些点之间的距离加起来. 这近似于$\frac{1}{4}$ 周长$\left(即\frac{1}{2}\pi\right)$.

因此在将此和乘以 2 时我们便得到了 π 的一个近似值.

(10) 重复上面习题(9)，但在四分之一圆上取 8 个点以得到另一个 π 的近似值. 这个近似值较上面得到的要好多少？

第三章的附加习题

(1) 求经过点 $P_1=(x_1,y_1)$ 和 $P_2=(x_2,y_2)$ 的直线的一般方程.

在习题(2) ~ (4) 中，在你的 CAS 上作联结 P_1 和 P_2 的直线图形，并求联结 P_1 和 P_2 的线段的中点.

(2) $P_1=(2,0)$，$P_2=(-4,6)$.

(3) $P_1=(-1,7)$，$P_2=(-4,6)$.

(4) $P_1=(\sqrt{3},1)$，$P_2=(-1,1)$.

(5) 你能找到一个公式，用它来求联结点 P_1 和 P_2 线段的中点？

(6) 求 k，使得$(3,k)$ 与$(4,6)$ 和$(9,1)$ 等距.

(7) 求一直线的方程使此直线平行于 $y=6x-1$ 且其 y - 截距为 6.

(8) 求一直线方程，此直线是联结 $P_1=(2,6)$ 和 $P_2=(3,11)$ 线段的垂直平分线. 用你的 CAS 作出此直线和线段的图.

(9) 求一直线方程，此直线是联结 $P_1=(5,-1)$ 和 $P_2=(4,8)$ 的线段的垂直平分线. 用你的 CAS 作出此直线和线段的图.

(10) 用你的 CAS 作出下面抛物线的图形，并定出每一条对称直线：

$$y = -(x-2)^2 - 3.$$

(11) 求一抛物线的方程，此抛物线的对称线为 $x = 1$，且开口向下并有极大值 $y = 10$. 提示：查看习题(10)并作出改变2或3后的许多种图像.

(12) 求出一条直线的斜率和它与 x 轴的夹角 θ 之间的关系.(假定 $\theta \leqslant \pi$).

(13) 设 L_1 和 L_2 是具斜率 m_1 和 m_2 的两条直线，它们相交于点 p. 设 θ 为这两条直线在 p 点构成的角. 设 β_1 和 β_2 分别为 L_1 与 x 轴和 L_2 与 x 轴构成的角. 假设 $\beta_2 > \beta_1$. 你能用 β_1 和 β_2 算出 $\tan(\theta)$ 吗?

(14) 考虑联结两个任意点 a, b 的线段. 设 A 为一点，使得线段 Aa 与 Ab 之间的角 α 为直角. 当保持角 α 为 $\frac{\pi}{2}$, A 点移动时它所描绘出的几何图形是什么?

(15) 在你的 CAS 上作 $(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ 的图形.

(a) 用 $\frac{(x-1)^2}{4}$ 代替 $(x-1)^2$，作出所得方程的图. 你能说些什么?

(b) 以 $\frac{(y-1)^2}{4}$ 代替 $(y-1)^2$，作出所得方程的图，你注意到了什么?还有中心吗?

(16) 用你的 CAS 作 $\frac{(x-1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1$ 的图. 你能发现对称性吗?还有中心?所得图形被称做一个左右对称型双曲线. 方程

$$(y-1)^2 - \frac{(x-1)^2}{4} = 1.$$

为"上下对称型"双曲线的方程. 作出它的图来以识别对称性和中心.

(17) 仍旧考虑方程

$$\frac{(x-1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1.$$

如果方程右端变成0会发生什么?如果用 -2 替代它又会发生什么?

(18) 还是考虑前一个问题中的方程. 在你的 CAS 上研究右端换为0后所发生的情形. 作出表示

$$\frac{(x-1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1$$

解的图形.

(19) 将方程

$$x^2 - y^2 + 4x + 2y + 2 = 0$$

化成类似于习题(18)中的方程形式来识别其图形.

(20) 将方程

$$2x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$

化成类似于习题(18)中的方程形式来识别其图形.

第四章　极限和连续性

4.1　序列的极限

考虑一个实数的序列,例如

$$4.01,4.001,4.00001,4.000000001,\cdots.$$

如果我们假定此序列无限地继续下去,(递从的规则是,我们有数4,一个小数点,一段0,其长度一直加倍下去,然后是一个1),显然这些序列中的数越来越接近4,我们说,这序列**收敛**于4,或者此序列的**极限**是4. 正式地我们有下述定义:

定义　实数的一个无穷序列

$$a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$$

收敛于 a,或者趋向**极限** a 是说,如果

$$|a-a_n|$$

对所有 $n>N$,当 $N\to\infty$ 时它变得任意的小. 我们简洁地表示这种情形为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,$$

或者

$$a_1,a_2,a_3,\cdots\to a.$$

例 4.1　在上面的序列中令 $a_1=4.01,a_2=4.001,a_3=4.00001$,等等,

我们有

$$|4-a_n| = 10^{-2^n} = \underbrace{0.00\cdots 0}_{2^n\text{个}}01.$$

由此得到,对任意大的 N,如果 $n > N$,则 $|4-a_n| < 10^{-2^N}$. 对于此例它证明了 $a_1, a_2, a_3, \cdots \to 4$.

4.2 函数的极限

函数极限的概念是微积分奠基性的本质思想之一. 从直观的观点看,事情是简单的. 然而困难在于将直观化成精确. 许多学生对此精确定义采取了遮遮掩掩的态度,这对他们理解微积分带来重大的损失. 为了想弥补这种情况,我们从简单的着手.

悖论 在你的 CAS 上定义函数

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1},$$

如果你要求 $f(1)$ 的值,CAS 转而回应说它不能用 0 去除. 但简单应用初等代数便有了等式

$$f(x) = \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1},$$

它使我们认为 $f(1)$ 应该等于 1/2.

到底怎样了?问题出在上面的函数在 $x=1$ 没有明确的定义,从而计算机不能真正了解函数在这一点的规则. 如果你的 CAS 有一个化简指令(SIMPLIFY),那么当此指令启动后它将消去这个函数的分子和分母的公共因子 $(x-1)$,最后得到

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

可惜,化简指令并不总能做这种技巧. 要明白这点,考虑例子,即函数

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

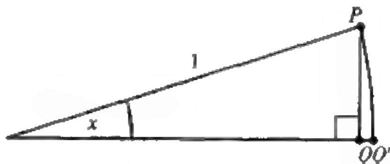
在你的 CAS 上你可以构造 $g(x)$ 并容易验证数值 $g(\pi/2) = 0.636\ 62\cdots$, $g(1.5) = 0.665\cdots$. 但假如我们试图计算 $g(0)$ 时,计算机就要回应错误的信息. 即便我们试图利用化简指令重新构造 $g(x)$ 后,当我们要求值 $g(0)$ 时我们仍旧会面临着错误信息.

例 4.2 基于 CAS 计算,$g(0)$ 应该有什么值?

如果我们考虑数列(它趋向0):

$$1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \cdots$$

并在此序列的每点上计算 $g(x)$，我们得到 $g(1) = 0.84147\cdots, g(0.1) = 0.99833\cdots, g(0.01) = 0.999999833\cdots, g(0.0001) = 0.999999998\cdots$. 这使我们预料会有 $g(0) = 1$. 一个富于启发性的证明可由考察下面图示得到:



其中三角形斜边的长为1,我们看到

$$\sin(x) = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = (PQ)\text{ 的长}.$$

但角 x 按弧度定义为弧 PQ' 的长. 当角 x 趋向0时弧则趋向线段 PQ,因此它们长度的比值趋向1.

例 4.3　设 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$. 利用系列的计算,能否知道 $f(1)$ 的值应该是什么?

在此例子，当我们检验，譬如序列 $f(0.9) = 0.52631579$, $f(0.99) = 0.50251256$, $f(0.999) = 0.5002501$, 及 $f(0.9999) = 0.500025$ 时,让我们察觉到 $f(1) = \frac{1}{2}$.

这个非正式的讨论把我们引向这样的结论,即对两个函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ 和 $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$,当简化指令 SIMPLIFY 不总是可行时,这些函数仍旧可以在这些具坏表现的点 $x = 1, x = 0$,分别通过极限过程被定义,即

$$f(0.9) = 0.52631579, f(0.99) = 0.50251256,$$
$$f(0.999) = 0.5002501, \cdots,$$
$$g(0.1) = 0.99833, g(0.01) = 0.999999833,$$
$$g(0.001) = 0.999999998, \cdots.$$

在上面的两种情形中序列的极限都给出了函数所预料到的值.

定义　设 $F(x)$ 为一函数. 假设存在一个实数 b,使得对任何一个点序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots \longrightarrow a$$

都有

$$\lim_{n\to\infty} F(a_n) = b.$$

我们则说

$$\lim_{x\to a} F(x) = b.$$

注 记号$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$主要用于在$f(a)$没有明确定义的时候. 如果$f(a)$确有定义且上述极限存在,则写为$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

例 4.4 考虑$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$. 由于$f(x)$在$x = 3$有明确定义,便没有必要通过极限过程计算在$x \to 3$时$f(x)$的极限. 我们仅仅需要赋值$f(3)$来计算极限:

$$\lim_{x\to 3} = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{3-1}{9-1} = \frac{1}{4}.$$

相对照而言,当$x \to 1$($f(x)$在这点没有确切的定义)时的极限必须由考虑序列

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3), \cdots$$

来计算,这里$a_1, a_2, a_3, \cdots \longrightarrow 1$是任一趋向1的序列. 由于序列中每个$a_i$不等于1,我们可以简化这些分数:

$$f(a_i) = \frac{a_i - 1}{a_i^2 - 1} = \frac{1}{a_i + 1}.$$

于是留给我们的是一个趋向于$\dfrac{1}{2}$的序列,

$$\frac{1}{a_1+1}, \frac{1}{a_2+1}, \frac{1}{a_3+1}, \cdots \longrightarrow \frac{1}{2},$$

从而可以得出结论

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}.$$

这可以重写为

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

例 4.5 计算极限

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}.$$

这个例子类似于前面的例子,这时我们最终发现可以在极限过程中化简这些项. 如此进行,我们看出有

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}.$$

例 4.6 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}.$$

这里我们从重写此极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}$$

开始. 如果令 $y=3x$,那么当 $x\to 0$ 时我们看到有 $y\to 0$,由于$\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}=1$,我们推导出

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=3.$$

§4.2 的习题

计算下面习题(1) ~ (8) 的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x^2-2x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+1}{2x-7}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^3-2x^2+x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^2+x-6}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x\cos(x)}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos(x))^2\sin(x)}{x^2+x}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{x^2+2x}$.

(9) 设$f(x)=\frac{3x}{x^2-2x}$. 计算$f(0.1)$, $f(0.01)$, $f(0.001)$, $f(-0.1)$, $f(-0.01)$, $f(-0.001)$. 把你的答案与习题(1) 得到的结果进行比较.

(10) 设$f(x)=\frac{(\cos(x))^2\sin(x)}{x^2+x}$. 计算$f(0.1)$, $f(0.01)$, $f(0.001)$, $f(-0.1)$, $f(-0.01)$ 和 $f(-0.001)$. 把你的答案与习题(7) 得到的结果进行比较.

(11) 利用等式

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|=\left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|,$$

证明$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$,其中 $a>0$.

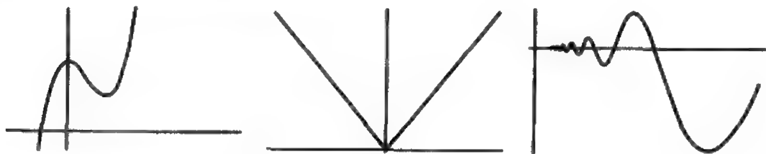
(12) 在你的CAS上定义 $g(x)=x^x$. 计算 $g(0.1)$, $g(0.01)$, $g(0.001)$, $g(0.000\,1)$. 你能猜出当 $x>0, x\to 0$ 时 $g(x)$ 的极限吗?

(13) 将四分之一个圆分成4,8,16,32,… 等份来推广 §3.2 的习题(9) 和(10). 在每个情形中计算出和数并乘以2 我们便得到了 π 的一个近似值. 证明这给出了收敛于 π 的一个数的序列.

4.3 连续函数

直观地说,一个函数是连续的就是假若它的图像是一条没有任何断裂的曲线,即它可以以一种连续的,不从纸上提起笔那样的方式画出来.

例 4.7 下面的图像是连续的:



而下面的则不是连续的:



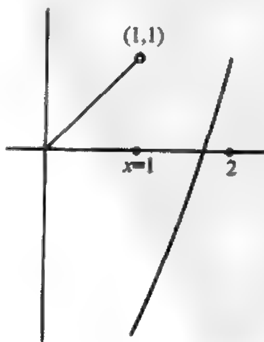
可惜计算机没有能力理解这一点的.

有各种各样的能在机器上体现的关于连续性定义的建议. 事实上这个问题完全不容易. 我们将解释前一百多年来发展起来的深刻而优美的解答.

定义 称函数 $F(x)$ **在区间** $c \leqslant x \leqslant d$ **为连续**是指,如果

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$$

对所有在区间 $c \leqslant a \leqslant d$ 的所有点 a 成立. 如果它在每个区间上连续则称函数 $F(x)$ **连续**.



例 4.8 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 上作函数

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{如果 } 0 \leqslant x < 1, \\ x^2 - 3, & \text{如果 } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

的图像. 它连续吗?

考察 $F(x)$ 的图像. 我们立刻看出在 $x = 1$ 处的不

连续性. 那个小圆圈表示点(1,1) 不是图像的部分. 为了明白此极限不存在,我们计算

$F(0.9) = 0.91,\quad F(0.99) = 0.9801,\quad F(0.999) = 0.998001,\cdots,$

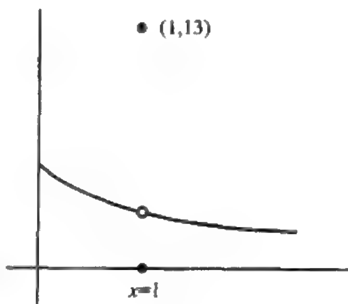
$F(1.1) = -1.79,\quad F(1.01) = -1.9899,\quad F(1.001) = -1.997999,\cdots.$

很清楚有两种可能的结果,它依赖于你是从左边趋向 1,例如用序列 0.9, 0.99,0.999,⋯ → 1,还是从右边趋向 1,例如用序列 1.1,1.01,1.001,⋯. 因此此极限不存在从而 $x = 1$ 是个不连续点.

例 4.9　在区间 $-\frac{1}{2} \leqslant x < 2$ 上作函数

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1}, & \text{如果 } x \neq 1, \\ 13, & \text{如果 } x = 1 \end{cases}$$

的图像. 它连续吗?



图像如右图,其中$\left(1,\frac{1}{2}\right)$不是图像的组成部分而(1,13)则是的. 显然在 $x = 1$ 有一个不连续. 在此例中我们有(通过例 4.4)

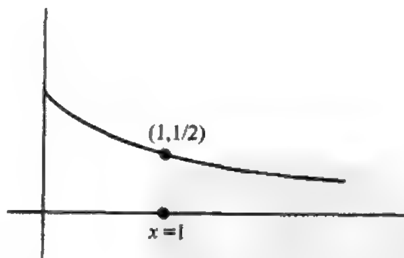
$$\lim_{x\to 1} F(x) = \frac{1}{2}.$$

但 $F(1) = 13$;显然违背了连续性的准则.

例 4.10　试解释为什么函数

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1}, & \text{如果 } x \neq 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{如果 } x = 1 \end{cases}$$

是连续的. 在此例题中,由于我们知道(通过例 4.4)



$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2} = F(1),$$

我们能推断此函数在 $x = 1$ 没有不连续性,而图像是连续的.

§4.3 的习题

用你的 CAS 作下列函数的图像. 找出所有的不连续点.

(1) $f(x)=\begin{cases}3x, & \text{如果 } 0\leqslant x<1,\\ 2x-1, & \text{如果 } 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{如果 } -1\leqslant x\leqslant 2,\\ -3, & \text{如果 } 2<x\leqslant 4.\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{如果 } -2\leqslant x<-1,\\ x^2, & \text{如果 } -1\leqslant x<1,\\ x^2-2x+1, & \text{如果 } 1\leqslant x<2.\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x}, & \text{如果 } -1\leqslant x<0,\\ 2x^2+1, & \text{如果 } 0<x\leqslant 1.\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x}, & \text{如果 } -\pi\leqslant x<\pi \text{ 且 } x\neq 0,\\ 5, & \text{如果 } x=0.\end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-2}{x^2+x-2}, & \text{如果 } 0\leqslant x<1,\\ x+1, & \text{如果 } 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

4.4 极限的代数

考虑所有收敛序列

$$a_1,a_2,\cdots\to a$$

的集合 S. 举例说, §4.1 所给的序列

$$4.01,4.001,4.00001,4.000000001,\cdots\to 4$$

在 S 中,集合 S 承袭了实数的所有代数性质.

命题 4.11 设

$$a_1,a_2,a_3,\cdots\to a,$$
$$b_1,b_2,b_3,\cdots\to b$$

为 S 中任意两个收敛序列. 于是序列

$$a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3,\cdots\to a\pm b,$$
$$a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2,a_3\cdot b_3,\cdots\to a\cdot b,$$
$$a_1/b_1,a_2/b_2,a_3/b_3,\cdots\to a/b,$$

也在 S 中.

容易得到上面陈述的证明. 例如第二个论断可由考虑下面的事实得到证明:

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| &= |a_nb_n \overbrace{- a_nb + a_nb}^{\text{小技巧:加0}} - ab| \\ &\leqslant |a_nb_n - a_nb| + |a_nb - ab| \\ &= |a_n| \cdot |b_n - b| + b \cdot |a_n - a|,\end{aligned}$$

由于对 n 充分大时 $|b_m - b|$ 和 $|a_n - a|$ 变为任意小，上式右端对 n 充分大时，必定也变为任意小.

收敛序列代数的进一步拓展便构成了函数极限的代数.

命题 4.12 下列的等式成立：

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a}f(x) \pm \lim_{x\to a}g(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x\to a}f(x)) \cdot (\lim_{x\to a}g(x)),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)},$$

其中最后一个陈述在假定 $\lim_{x\to a}g(x) \neq 0$ 时成立.

第四章的附加习题

(1) 设 $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$. 在你的 CAS 上计算

$$f(1.5), f(1.6), f(1.7), \cdots, f(1.9), f(1.99), f(1.999).$$

当 x 越靠近 2 时，这些值似乎趋向一个有限值，对吗？$f(x)$ 连续吗？

(2) 计算 $\lim_{x\to 2}f(x)$.

计算下面的极限. 在你的 CAS 上作这些函数的图像.

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$. (4) $\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$. (5) $\lim_{y\to 4}\frac{4-y}{2-\sqrt{y}}$.

(6) 设 $f(x) = \begin{cases}\frac{x^2-16}{x+4}, & \text{如果 } x \neq -4, \\ k, & \text{如果 } x = -4.\end{cases}$

求 k，使得 $f(x)$ 连续.

(7) 设 $f(x) = \begin{cases}\frac{1}{4}x - 2, & \text{如果 } x \leqslant k, \\ x^2 - 16x + 64, & \text{如果 } x > k.\end{cases}$

求 k，使得 $f(x)$ 连续.

(8) 设 $f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$. 当 x 趋向 0 时 $f(x)$ 的极限存在吗？在你的 CAS 上对 $x = 1, 0.1, 0.01,$

0.001,0.0001,…计算$f(x)$. 你能否找到一个基于所知$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$的事实的不同方法来计算此极限?

(9) 设$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}+\frac{x^2}{x(x+1)}$. $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是什么?

(10) 设

$$f(x)=\frac{x-3}{(x^2-9)(x-2)}-\frac{x-1}{x^3-1}.$$

用你的 CAS 计算$\lim\limits_{x\to3}f(x)$ 和$\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

(11) 设

$$f(x)=\frac{x-3}{(x^2-9)(x-2)}\cdot\frac{x-1}{x^3-1}.$$

$\lim\limits_{x\to3}f(x)$ 和$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 是什么?

(12) 试证,如果f和g为在b连续的函数,则

(a) $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ 在b都连续.

(b) 如果$g(b)\neq0$则f/g在b连续.

(13) 如果g在b连续而f在$g(b)$连续,试证$f\cdot g$在b连续.

(14) 假设f有$f(-1)=2.5$, $f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(3)=1$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$,其中$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 定义为当x从左边趋向1时f的极限,而$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ 定义为当x从右边趋向1时f的极限,你能粗略地画出f的一个图像吗?$f(x)$在$x=1$连续吗?

(15) 在你的 CAS 上用适当的指令功能对有理函数

$$R(x)=\frac{x^2+6x+8}{x^2-1}$$

进行因式分解. 求$\lim\limits_{x\to-2}R(x)$ 并作$R(x)$的图.

我们常常需要了解当x变得非常大时一个函数$f(x)$是如何表现的. 计算$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 的技巧十分相似于有限极限时的情形.

计算下列的极限并用你的 CAS 作这些函数的图像.

(16) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+3}$. **提示**:从分子和分母中提出因式$x^2$并消去. 然后用$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$的事实.

(17) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-11}{6x^2+3}$.

(18) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x}$.

(19) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{3x^3+2x}$.

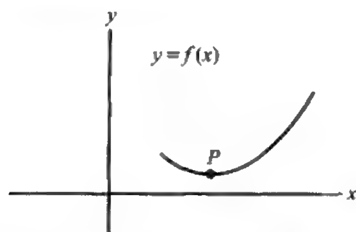
(20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}$.

(21) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+3}$.

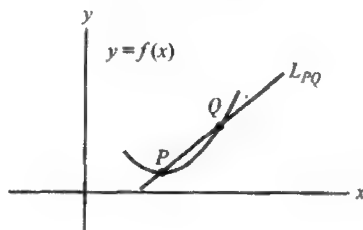
第五章　导数

5.1　切线

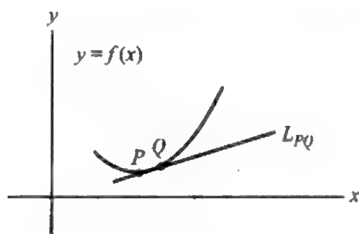
设 $y = f(x)$ 为一任意函数，它在包含点 P 的一个区间上连续.



设 Q 为此曲线上靠近 P 的一个点. 考虑同时通过点 P 和 Q 的直线 L_{PQ}.



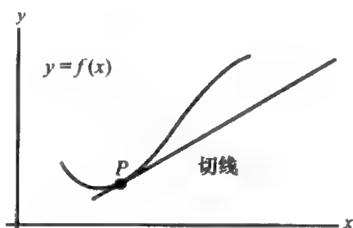
如果我们让 Q 移动并向 P 靠拢从而形成一条新直线，则图形变了.



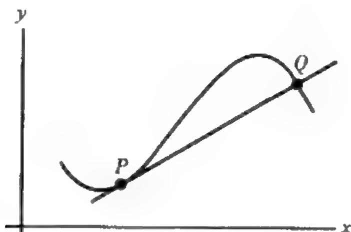
定义 曲线 $y = f(x)$ 在点 P 的**切线**是直线 L_{PQ} 当 $Q \to P$ 时的极限. 如果此极限不存在则它无切线.

注 (1) 为简明起见我们省略了直线的极限的准确定义：依赖读者的直觉能力.

(2) 假如 $f(x)$ 的图像自身不是直线，则局部地（即在 P 的一个小邻域中）上面定义的切线（如果存在）与此曲线只交于 P，即



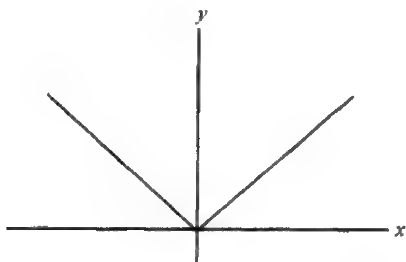
但它可以交此曲线于某点 $Q \neq P$.



(3) 在 $f(x)$ 的图像实际上就是条直线，因而 $f(x) = mx + b$ 时，此切线必与图像自身相同.

警示　存在在一点的切线不存在的连续曲线!

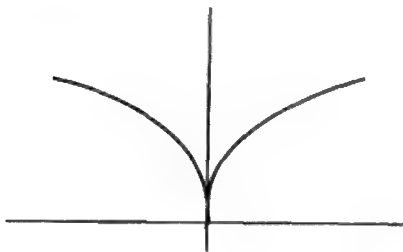
例 5.1　绝对值函数 $y = |x|$ 有图像:



形象地我们可以看出在(0,0) 的两条可能的切线. 由于在此例题中定义的极限条件被破坏,故在原点没有切线.

例 5.2　用你的 CAS 作函数 $y = x^{2/3} = (\sqrt[3]{x})^2$ 的图像. 试指明它形象地在原点有两条可能的切线.

这里我们再次看出在原点的两条可能的切线.



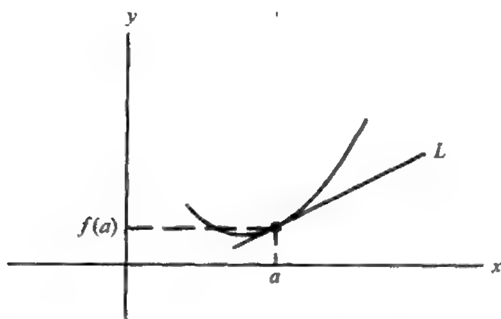
5.2　函数的导数

导数的概念是微积分的基础构件. 然而,尽管它如此重要,它的定义却惊人地简单.

假定函数 $y = f(x)$ 在包含 a 的一个区间上为连续并在此点有一条唯一的切线.

定义　*定义函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 的**导数**为在点 $(a, f(a))$ 的切线 L 的斜率.*

提问　常值函数的导数是什么?



回答 由于常值函数的图像是条水平直线，它在任一点上的切线与图像自身重合. 因此切线的斜率为 0，即常值函数的导数为 0.

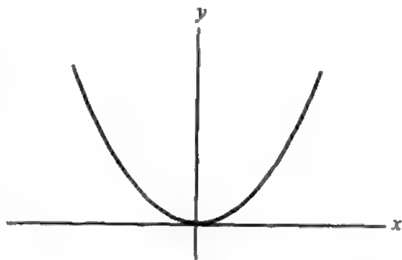
提问 函数 $f(x) = 3x + 2$ 在点 $(1,5)$ 的导数是什么？

回答 这里函数的图像还是一条直线，因而切线与图像自身重合，即切线有方程 $y = 3x + 2$. 于是我们看出导数等于切线的斜率，等于 3.

提问 函数 $f(x) = -8x + 7$. 在点 $(0,7)$ 的导数是什么？

回答 -8.

提问 函数 $f(x) = x^2$ 在点 $(0,0)$ 的导数是什么？



回答 作函数 $y = x^2$ 的图像，我们看出在原点 $(0,0)$ 的切线不过是 x 轴，其斜率为 0. 因此导数 $= 0$.

函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 导数有各种不同的标准记号，主要原因是由于微积分同时在英国和德国平行地得到了发展. 最为通行的记号是

$$f'(a), \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}, \frac{df}{dx}.$$

例 5.3 设 $f(x) = 18x - 91$，$g(x) = x^2$. 计算 $f'(3)$ 和 $g'(0)$.

由前面的讨论知 $f'(3) = 18$ 而 $g'(0) = 0$. 用其他的记号有

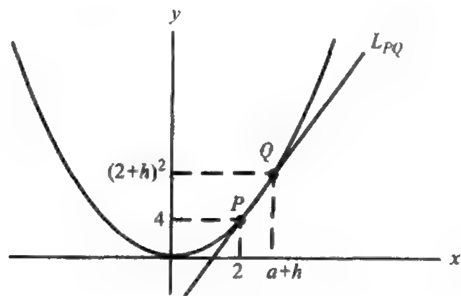
$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=3} = 18, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0.$$

5.3 用极限计算导数

可以用极限来计算一个函数的导数. 在研讨一般情形之前先考虑下面的例题.

例 5.4 设 $f(x) = x^2$. 计算 $f'(2)$,即此曲线在点 $(2,4)$ 的切线的斜率.

首先作此函数的图像并标出点 $P = (2,4)$.



然后考虑靠近 P 的一点 Q,其坐标为 $(2+h,(2+h)^2)$. 由定义,直线 L_{PQ}(即经过 P,Q 的直线)的斜率为

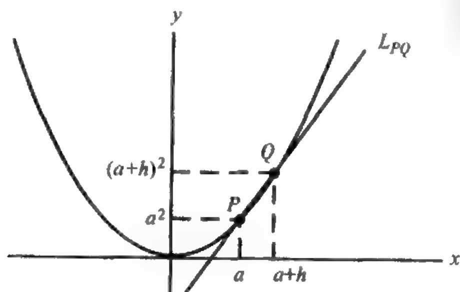
$$斜率(L_{PQ}) = \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

现在,当 $h \to 0$ 时点 $Q \to P$,而 L_{PQ} 趋向于切线. 切线的斜率必定为4,即 $f'(2) = 4$.

我们现在可以沿用上面的模式去计算 f 在任意固定点 a 的导数.

例 5.5 求 $y = x^2$ 在任意点 a 的导数.

设 $P = (a,a^2)$,而 $Q = (a+h,(a+h)^2)$.



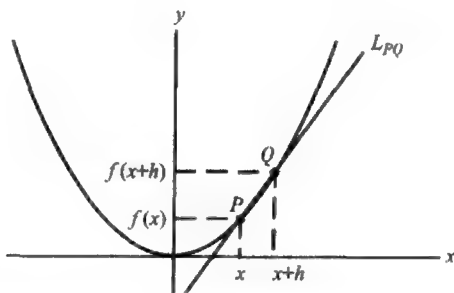
我们再次计算 L_{PQ} 的斜率：

$$斜率(L_{PQ}) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$
$$= \frac{2ah + h^2}{h}$$
$$= 2a + h.$$

当 $h \to 0$ 时直线 L_{PQ} 趋向于切线，我们看到了

$$f'(a) = 2a.$$

最终，我们观察到：上面的过程可以应用到任意的函数 $y = f(x)$. 设 $P = (x, f(x))$ 为曲线上一个定点并设 $Q = (x+h, f(x+h))$ 为靠近 P 的一点.



在这个一般情形中当我们计算 L_{PQ} 的斜率时便得到：

$$斜率(L_{PQ}) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

让 $h \to 0$ 便得到了切线的斜率. 这使我们有了导数的另一个定义.

定义 设 $f(x)$ 为一个在包含 x 的区间上连续的函数. 于是 f 的导数由

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - x}{h}$$

给出. 如果上面的极限不存在，则此导数不存在. 如果对每个实数 x, $f'(x)$ 存在，我们则说 $f(x)$ 是可微的.

例 5.6 用极限计算 $f(x) = x^3$ 的导数.

从定义出发我们看到

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$
$$= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= 3x^2 + 3xh + h^2.$$

当我们令 $h \to 0$ 则最后有 $f'(x) = 3x^2$.

例 5.7 用极限计算 $f(x) = \frac{1}{x}$(对 $x \neq 0$) 的导数.

这时有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)}.$$

令 $h \to 0$,我们得到结论

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

警示 如果函数 $f(x)$ 在一点 x 没有唯一的切线,则 $f'(x)$ 不存在!例如,绝对值函数 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 没有导数.

注 如果 $f(x)$ 是一个可微函数,则 $f'(x)$ 也是一个函数,这是因为对每个 x, $f'(x)$ 是唯一的. 这是我们选取记号 $f'(x)$ 而不是记号 $\frac{df}{dx}$ 的理由;后者在此教本中可以见到.

§5.3 的习题

利用你的 CAS 的展开(EXPAND) 和化简(SIMPLIFY) 功能计算(1) ~ (10) 中函数的 $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. 用默算 $h \to 0$ 时极限的方法完成对 $f'(x)$ 的计算.

(1) $f(x) = x^4$. (2) $f(x) = x^{19}$. (3) $f(x) = x^{50}$. (4) $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

(5) $100x^{18} + 3x^2 - 11$. (6) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$. (7) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

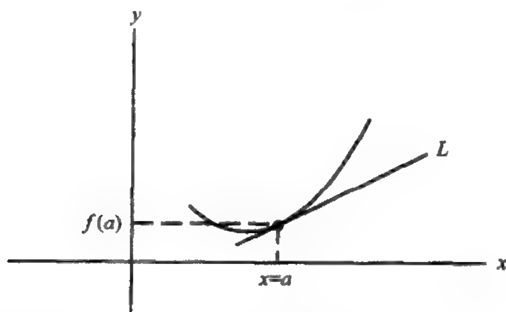
(8) $f(x) = \sqrt{x}$. 提示:使用等式 $(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) = (\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \overbrace{\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}}^{\text{小技巧}}$.

(9) $f(x) = \sqrt{x + 11}$. (10) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$.

5.4 求切线的方程

设 $y = f(x)$ 为一连续函数,它在每点 x 具有一条唯一的切线.

问题 曲线 $y = f(x)$ 在点 $x = a$ 的切线 L 的方程是什么?



早先我们已经证明过任一直线的方程具有形式

$$y = mx + b,$$

其中 m 为此直线的斜率,b 为其 y - 截距. 因为 L 是切线,由定义我们有

$$斜率(L) = f'(a).$$

因此 L 的方程必定有形式

$$y = f'(a)x + b.$$

如何计算 b?有多种办法. 或许最简单的是利用 L 经过点$(a, f(a))$ 的事实. 当我们把 $x = a$ 和 $y = f(a)$ 代入 L 的方程时得到了

$$f(a) = f'(a) \cdot a + b.$$

解出 b 得出

$$b = f(a) - f'(a) \cdot a$$

故此切线的方程现在看起来像

$$\begin{aligned} y = f'(a)x + b &= f'(a)x + (f(a) - f'(a) \cdot a) \\ &= f'(a)(x - a) + f(a). \end{aligned}$$

例 5.8 求曲线 $y = x^3$ 在点(2,8) 的切线方程.

这个问题可按下面步骤着手:

第 1 步 在你的 CAS 上构造 $f(x) = x^3$.

第 2 步 计算 $f(2) = 8$, $f'(2) = 12$.

第3步 在切线方程 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ 中代入 $a = 2$ 得到

$$y = 12(x-2) + 8$$
$$= 12x - 16.$$

例5.9 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $x = 5$ 的切线方程.

因为 $f(x) = \frac{1}{x}$ 以及 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$,得到了 $f(5) = \frac{1}{5}$ 及 $f'(5) = -\frac{1}{25}$. 将这些值代入切线方程 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ 我们得到在 $x = 5$ 的切线方程:

$$y = -\frac{1}{25}(x-5) + \frac{1}{5} = -\frac{x}{25} + \frac{2}{5}.$$

§5.4 的习题

在习题(1) ~ (6) 中,求曲线 $y = f(x)$ 在点 P 的切线方程. 用你的 CAS 作出曲线,点 P 和在 P 的切线的图.

(1) $f(x) = 2x^3 - x + 4, P = (0,4)$.

(2) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x + 9, P = (1,9)$.

(3) $f(x) = 2/(x+1), P = (2,2/3)$.

(4) $f(x) = x + \frac{1}{x}, P = (2,5/2)$.

(5) $f(x) = \sqrt{x+1}, P = (1,\sqrt{2})$.

(6) $f(x) = \sqrt{x+1}, P = (3,2)$.

(7) 求出两线 $y = x^2 - 2x + 4$ 的两条切线,它们都通过原点. 作出带有这两条切线的曲线的图.

(8) 证明 $f(x) = 3x^2$ 和 $g(x) = 2x^3 + 1$ 在(1,3) 有相同的切线. 作出这些曲线和切线的图.

(9) 曲线 $y = x^3 + 17x - 6$ 是否有一条切线,它平行于直线 l,其中 l 的方程为 $y = 4x + 37$?作此曲线,直线 l 和切线(如果存在) 的图.

(10) 曲线 $y = x^3 + 7x - 14$ 是否有一条切线,它平行于直线 l:$y = 19x + 8$?作曲线,直线 l 和切线(如果存在) 的图.

一条已知曲线 $y = f(x)$ 在一点 P 的**法线**被定义为通过 P 而垂直于此曲线在 P 的切线的直线. 在下面的问题中作曲线,点 P,在 P 的切线以及在 P 的法线的图.

(11) $f(x) = x^3 - 8, P = (2,0)$.

(12) $f(x) = \frac{1}{x}, P = (2,1/2)$.

(13) $f(x) = 2x^5 - 6x + 4, P = (0,4)$.

(14) $f(x) = x + x^2 + x^3, P = (0,0)$.

5.5 高阶导数

已知一个可微函数 $f(x)$,其导数 $f'(x)$ 自身是一个新的函数,它也可以是

可微的. 如果是这样,在取$f'(x)$的导数时我们得到

$$f''(x),$$

它被叫做$f(x)$的**二阶导数**. 各种记号被用于表示二阶导数:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = f''(x).$$

如果$f(x)$是可微函数而其导数$f'(x)$也是可微的,我们则称$f(x)$是一个**二次可微的**函数.

例 5.10 计算函数$f(x) = x^3$的二阶导数.

由我们在例 5.6 和例 5.5 的计算知道$f'(x) = 3x^2$而$f''(x) = 6x$.

例 5.11 对$x \neq 0$计算$f(x) = \frac{1}{x}$的二阶导数.

在例 5.7 中已知$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$;要计算这个二阶导数我们需要计算极限

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{-1}{(x+h)^2}\right)-\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-x^2+(x+h)^2}{h\cdot x^2\cdot(x+h)^2}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h\cdot x^2\cdot(x+h)^2}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2}\\ &= \frac{2}{x^3}.\end{aligned}$$

我们结果有$f''(x) = \frac{2}{x^3}$.

定义了二阶导数后我们可类似地定义高阶导数. 一个函数被称做是 n 次可微的是说,如果

$$f(x), \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = \frac{d^3f}{dx^3}, \cdots, \frac{d^nf}{dx^n},$$

都是有确切定义的函数.

例 5.12 求函数$f(x) = x^3$的三阶导数.

像已看到的,$f'(x) = 3x^2$,$f''(x) = 6x$. 由于$f(x) = 6x$的图像是条斜率为 6 的直线,故$f'''(x) = 6$.

例 5.13 求函数$f(x) = x^4$的 n 阶导数.

$f(x)$的一阶导数在 §5.3 习题(1) 中已被算过. 它是$f'(x) = 4x^3$. 二阶导

数是

$$\frac{d^2f}{dx^2}=12x^2,$$

三阶导数是

$$\frac{d^3f}{dx^3}=24x,$$

而四阶导数是

$$\frac{d^4f}{dx^4}=24.$$

所有更高阶的导数(即当 $n>4$) 因而能被看出为0.

§5.5 的习题

计算下列函数的一阶、二阶和三阶导数.用你的CAS检验你的答案.

(1) $f(x)=2x^2$.　(2) $f(x)=3x^3$.　(3) $f(x)=7x^4$.

(4) $f(x)=\frac{2}{x}$.　(5) $f(x)=\sqrt{x}$.　(6) $f(x)=3x^2-2x+1$.

(7) $f(x)=7x^3-2x+3$.　(8) $f(x)=4x-3$.　(9) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$.

(10) $f(x)=7x^9-2x^3+3x-14$.

(11) 试解释为什么多项式 $13x^5-5x^4+2x-12$ 对 $n>5$,它的 n 阶导数 $\frac{d^nf}{dx^n}=0$.

(12) 给出一个函数 $y=f(x)$ 的例子使它满足 $f(1)>0$, $f'(1)<0$ 而 $f''(1)>0$.

第五章的附加习题

在头两个问题中求曲线 $y=f(x)$ 在点 P 的切线方程以及法线方程,并且在你的CAS上作出所有的图.

(1) $f(x)=-x^2+12x-3$, $P=(1,8)$.

(2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$, $P=(1,1)$.

(3) 在你的CAS上用导数的极限定义计算 $x,x^2,x^3,\cdots,x^{12}$ 的导数.你留意到任何有规则的模式吗?你推出了当 n 为正整数时 x^n 的导数的表达式吗?用极限定义验证你的表达式.

(4) 设 a,b,c,d 为满足 $ad-bc=1$ 的常数.用导数的极限定义计算 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 的导数.

(5) 求曲线 $y=x^3-2x+1$ 上的点使在这点的切线是水平的.

(6) 试证曲线 $y = x^3 + 8x - 11$ 上具有斜率大于或等于 8 的切线.

(7) 在你的 CAS 上作函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, & \text{如果 } x \leqslant 0, \\ 4x + 4, & \text{如果 } x > 0 \end{cases}$$

的图像. 指出 $f(x)$ 是连续的. 指出 $f(x)$ 处处有导数. 在 $x = 0$ 的导数是什么?

(8) 在你的 CAS 上作函数

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 9x^2 + 27x - 27, & \text{如果 } x \leqslant 4, \\ 3x - 11, & \text{如果 } x > 4. \end{cases}$$

证明 $f(x)$ 连续. 证明 $f(x)$ 处处有导数. 在 $x = 0, x = 4, x = 5$ 的导数是什么?

(9) 设 $f(x) = \frac{1}{x}$. 用极限定义和你的 CAS 推导出 $f(x)$ 的导数. 现在设 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 然后是 $\frac{1}{x^3}$, …. 其导数是什么?有模式吗?

(10) 设 $f(x) = \sin(x)$. 用导数的极限定义证明 $f'(0) = 1$.

(11) 用你的 CAS 作函数 $f(x) = \cos(x)$ 的图像. 观察此图, 确定 $f'\left(\frac{5\pi}{7}\right)$ 是正的还是负的.

提示: 想像一下切线有正斜率或负斜率的情形.

(12) 用你的 CAS 作函数 $f(x) = 2^x$ 的图像. 观察此图, 确定 $f'(3)$ 是正还是负.

(13) 用你的 CAS 作函数 $f(x) = x^{1/3} + 1$ 的图像. 用导数的极限定义检查在 $x = 0$, $f(x)$ 是可微的还是不可微的.

(14) 假设函数 f 在 $x = 2$ 可微且 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h)}{h} = 6$. 求 $f(2)$ 和 $f'(2)$.

(15) 证明抛物线 $y = ax^2, a \neq 0$ 的任意两条切线的交点位于两切点间的中间竖直线上.

第六章　导数的基本应用

6.1　速度

设想一辆以匀速55迈(即每小时的英里数)行驶的汽车. 那么在$\frac{1}{2}$小时后此车将行驶了$22\frac{1}{2}$英里,而3小时后它将穿行165英里. 这些是方程

$$s(t) = 55t$$

的特殊情形,其中的$s(t)$代表t小时后行驶了的距离. 我们已经把行驶了的距离表示为时间的函数$s(t)$.(为清晰起见,字母s已成为距离的标准记号而不是字母d,后者通常用在导数的记号中.)如果汽车在加速,即越开越快会怎样呢?这时距离函数可能会具有形式

$$s(t) = 10t^2.$$

它表明在一已知的时间段中将比在**速度**为常值时所行驶的路程要更多. 这时$s(10) = 1000$,它几乎是按匀速55迈所走过的路程的两倍.

例6.1(酒后驾驶)　让我们假定度量一个酒后驾驶人从原点行驶距离的函数由方程

$$s(t) = t\cdot\left(t-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(t-\frac{1}{10}\right)$$

给出. 于是 $s(1)=\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$,即酒后驾驶人在1小时内行驶了$\frac{3}{4}$英里. 但是$s\left(\frac{1}{6}\right)=0$,它表明酒后驾驶人在$\frac{1}{6}$小时 = 10分钟后回到了起点. 他前后来回地行驶.

注 距离函数 $s(t)$ 依赖于物体是如何运动的. 它常常是由实验求出的.

问题 假定知道了运动物体的距离函数 $s(t)$,如何求出物体在任意时刻 t 的速度?

由于

$$\text{平均速度}=\frac{\text{行驶过的距离}}{\text{花费的时间}},$$

我们看出在时间 t 和 $t+h$ 间的平均速度由

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

给出. 从而在时刻 t 的瞬时速度由极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=s'(t),$$

即距离函数的导数给出.

例 6.2 在10分钟后酒后驾驶人开得有多快?在30分钟后有多快?

(用CAS) 展开函数并取导数给出了

$$s(t)=t^3-\frac{4}{15}t^2+\frac{t}{60},$$

$$s'(t)=3t^2-\frac{8}{15}t+\frac{1}{60}.$$

因而 $s'\left(\frac{1}{6}\right)=0.011\ 111$ 迈,$s'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ 迈.

例 6.3(掉落的苹果) 按传说,这是激励牛顿爵士发展出微积分的例子. 使我们相信的是,坐在苹果树下时,牛顿有了观察苹果下落的机会:依照虚构的故事,在他心灵感应的关键时刻一个苹果正好打中他的脑袋!

经过许多实验之后,物理学家们得到所经过距离的一个好的近似,即物体降落向地面的距离(英尺).

$$s(t)=16t^2.$$

注意,此公式与物体的大小和重量无关. 这是伽利略在1589年一个著名实验的结果,实验是在比萨斜塔进行的. 一块小石头和一颗加农炮弹同时从塔顶上落

下，可以看到它们在相同时间击中了地面.

例 6.4　如果一个苹果从 13 英尺的高处落下，它落到地面要花多长的时间?在它击中地面时其速度是多少?

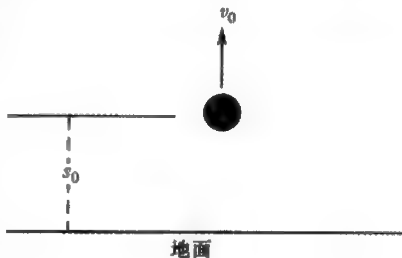
苹果击中地面所需的总时间可由解方程 $s(t) = 16t^2 = 13$ 得到. 显然解是 $t = \sqrt{13/16} = \frac{1}{4}\sqrt{13}$. 撞击的速度是 $s'(\sqrt{13}/4) = 32\sqrt{13}/4 = 8\sqrt{13}$ 英尺每秒.

注　在例 6.3 中人们有时直观地相信苹果落到地面时的速度 $= 0$. 这是完全不正确的 —— 想一想为什么人们不从窗户往外跳.

例 6.5（扔向空中的球）　假设一个球在时间 $t = 0$，从高度 s_0 处以初始速度 v_0 垂直向上抛出. 设 $s(t)$ 表示在时刻 t 球的高度（从地面量起）. 显然 $s(0) = s_0$. 另外，我们必定有 $s'(0) = v_0$. 鉴于对下落苹果的距离公式（见例 6.3）我们推导出

$$s(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0.$$

$16t^2$ 前面的负号出于在此模型中引力把球拉向下，即 $s(t)$ 并不是路程而是高度函数.



例 6.6　一个球在 48 英尺高处以初速度 32 英尺每秒垂直向上抛出. 此球落地需要多长时间?撞击时的速度是多少?

在此例题中我们已知 $v_0 = 32$ 和 $s_0 = 48$. 因此球的位置由

$$s(t) = -16t^2 + 32t + 48$$

给出，而速度由

$$s'(t) = -32t + 32$$

给出. 球在 $s(t) = 0$ 的时间 t 撞击到地面，即

$$-16t^2 + 32t + 48 = 8(-2t^2 + 4t + 6) = 0.$$

因而球击中地面的时间是 3 秒，而撞击时的速度为 $s'(3) = -64$ 英尺每秒. 速度为负值表示球往下运动.

§6.1 的习题

(1) 一块石头从 900 英尺高的高大建筑物上落下. 石头击中地面要花多少时间，以及撞击时的速度是多少?

(2) 从高 16 英尺处以初速度 8 英尺每秒垂直向上抛出一个球. 此球达到的最大高度是多少?

(3) 从高 8 英尺处以初速 8 英尺每秒垂直向上抛出一整袋豆. 此袋豆击中地面要花多少时间以及撞击时的速度是多少?

(4) 在一颗遥远的行星表面上,从高 s_0 处以初速 v_0 垂直向上抛出一块岩石. 它运行的距离为 $s(t)$,这里 $s(t)$ 由

$$s(t) = -100t^3 + v_0t + s_0$$

给出. 如果 $v_0 = 1\,000$ 英尺每秒,$s_0 = 50$ 英尺,确定此石块所达到的最大高度. 在 1 秒钟时它的速度是多少?

(5) 一艘航天飞船正要着陆. 它在时间 t(以秒度量) 时的高度为 $h(t)$(以英里度量),$h(t)$ 由函数

$$h(t) = 120 - 120t + 30t^2$$

给出. 航天飞船着陆需要多长时间,以及在它触到地面时的速度是多少?

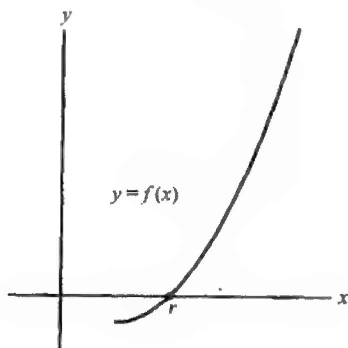
6.2 牛顿法

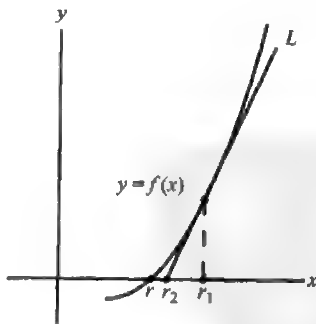
设 $f(x)$ 为任一可微函数且其图像穿过 x 轴.

问题 求方程 $f(x) = 0$ 对 x 的解.

牛顿研究出一种漂亮而巧妙的方法来解决这个问题. 我们来阐述这个想法——它是微积分早期的一个杰出成就.

由于 $y = f(x)$ 的图像穿过 x 轴,在穿越点 $x = r$ 附近它必定像下左图:





显然,由定义,$x = r$ 是我们的问题的解. 然而如何找到 r?

牛顿的想法是,开始时对 r 的值作一个猜测,假定称它的 r_1. 如果 r_1 靠近 r,作曲线 $y = f(x)$ 在点$(r_1, f(r_1))$ 的切线 L,得到了上右图. 我们把这个新的点(即 L 与 x 轴的交点) 标记为 r_2. 点 r_2 现在更为靠近 r. 我们能像下面那样算出 r_2.

直线 L 的方程由

$$y = f'(r_1)\cdot x + (f(r_1) - f'(r_1)\cdot r_1)$$

给出(见 §5.4). 因为此直线经过点$(r_2,0)$,我们看出有

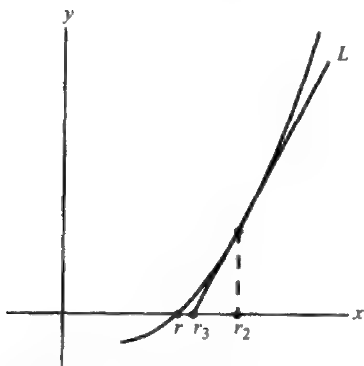
$$0 = f'(r_1)r_2 + f(r_1) - f'(r_1)r_1,$$

从而可以解出 r_2:

$$r_2 = r_1 - \frac{f(r_1)}{f'(r_1)}.$$

重复这个过程便得到一个点

$$r_3 = r_2 - \frac{f(r_2)}{f'(r_2)}.$$



对此过程进行迭代,我们得到一个点的序列

$$r_1, r_2, r_3, \cdots \to r,$$

其中第 n 项为

$$r_n = r_{n-1} - \frac{f(r_{n-1})}{f'(r_{n-1})}$$

$(n = 2,3,4,\cdots)$,它收敛于实根 r.

警示　如果第一个近似值 r_1 不是很靠近 r 则牛顿法可能会无效,而序列 r_1, r_2, r_3, $\cdots$ 可能不收敛. 这时应该试一试一个更好的初始近似值 r_1.

例 6.7　用牛顿法求方程 $x^2 - 5 = 0$ 的一个近似解.

$f(x) = x^2 - 5$ 的导数为线性函数 $f'(x) = 2x$. 开始用牛顿法必须以对 r_1 的合理选取着手;这时让我们试一下 $r_1 = 2$. 于是

$$r_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{-1}{4} = 2.25,$$

而后继续此法，

$$r_3 = 2.25 - \frac{f(2.25)}{f'(2.25)} = 2.25 - \frac{(2.25)^2 - 5}{4.5} = 2.236....$$

考虑到我们所做的计算量很小，我们已经得到了一个非常好的近似值 $r \approx 2.236$. 注意有 $2.236^2 = 4.9997\cdots$. 倘若我们继续按此方法做下去，我们当然会得到一个更加精细的近似值.

§6.2 的习题

利用 CAS 协助下面的计算.

(1) 从 $r_1 = 2$ 开始求 $9^{1/3}$ 到 5 位小数. 提示：选取 $f(x) = x^3 - 9$.

(2) 从 $r_1 = 1$ 开始，用牛顿法求二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的一个近似解（到 5 位小数）. 找另一个起始值 r_1 使得牛顿法失效.

(3) 用牛顿法去逼近方程 $x^5 - 3x^2 + 2 = 0$ 的一个实根.

(4) 用牛顿法去逼近方程 $x^7 - 3x^4 + 2 = 0$ 的一个实根.

(5) 证明牛顿法对方程 $x^2 + 1 = 0$ 必定无效.

第六章的附加习题

(1) 一架飞机以 500 英里／小时的速度飞行，并且在 2 000 英里的高度落下一个物体. 此物体要多长时间到达地面？撞击时的速度是什么？在你的 CAS 上作出表示此轨线的函数图像.

(2) 假定一辆车沿直道运动的平均速度在 t 分钟时为 $t^2 + t, t \geqslant 0$. 在 $t = 0$ 时的瞬时速度是多少？

(3) 用牛顿法去逼近 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 中的根. 使用你的 CAS 并选取初始值 $x_1 = 5$.

(4) 用牛顿法去逼近 $2x^3 - 4x + 1 = 0$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 中的根. 使用你的 CAS 并选取初始值 $x_1 = 5$. 作此函数图像.

用牛顿法去逼近下述曲线的交点的横坐标. 用你的 CAS 作出每条曲线的图形.

(5) $y = \frac{1}{x^2}$ 和 $y = x^3 - 3 + \frac{2}{x^2}$.　　(6) $y = x$ 和 $y = \cos(x)$.

(7) $y = x^2$ 和 $y = x^7 + 3x^5 - 4$.　　(8) $y = 3x^5 + 2x^3 - 2$ 和 $y = 2x^5 - 17$.

(9) $xy = 1$ 和 $y = x^3 - 6x + 9$.

用牛顿法解方程，用你的 CAS 加以验证并作曲线的图.

(10) $x^5 + 9x + 1 = 0$.　　(11) $\frac{4}{3}\pi x^3 + 2x - 3 = 0$.　　(12) $x^4 + x^3 + x^2 = 1$.

(13) $x^5+x^3+2x=5.$　(14) $x^4-4x^2-4x=8.$　(15) $x^5+3x^3=17.$

(16) $x^7-3x^5+9x^3-14x+1=0.$

(17) 一个酒后驾车者从酒吧算起(他或向北或向南行驶而酒吧位于原点)的路程由 $s(t)=3t^3-200t+1$ 给出. 在 5 分钟后酒后驾车开得有多快?10 分钟后呢?

(18) 一个抛掷体离地面的距离由 $s(t)=at^2+bt+c, a<0$ 给出,而 t 为以秒计的时间. 此抛掷体的最大高度多少?在什么时间达到它的最大高度?

(19) 一个司机离他家南或北向的距离由 $s(t)=at^3+bt^2+ct+d, a\neq 0$ 给出,而 t 为以小时计的时间. 司机的速度多少?司机回家的次数如何?

第七章　微积分的规则

7.1　初级规则

在能够讲述导数的进一步应用之前,我们必须找出一些能对范围广泛的一类函数进行导数计算的有效方法,而不需诉求于原始的定义.我们从四个初级的规则开始:设 c 为一常数,$f(x)$ 和 $g(x)$ 为任意的函数,而 N 为一实数,那么

规则 1　$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0,$$

规则 2　$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^N = Nx^{N-1},$$

规则 3　$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}cf(x) = cf'(x),$$

规则 4　$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x).$$

在验证这些规则之前先看看它们是如何地有用.

例 7.1　设 $f(x) = 3x^{92} - 4x^{13} + 6x - 3$. 我们的规则让我们凭眼力(几乎不费劲)计算出 $f'(x)$:

$$f'(x) = 3.92x^{91} - 4.13x^{12} + 6.$$

这个例子由做算术完成,

$$f'(x) = 276x^{91} - 52x^{12} + 6.$$

例 7.2 $f(x) = \pi x^{5.03} - x^{-2} + 111$ 的导数只不过是

$$f'(x) = (5.03)\pi x^{4.03} + 2x^{-3}.$$

验证规则 1 ~ 4.

规则 1 常数的导数为 0 已在 §5.2 中证明.

规则 2 我们考查 §5.3 中 $N = 0,1,2,3$ 的情形. 我们把一般情形的证明推延到 §17.1,在那里我们将处在可以利用对数来进行验证的境地.

规则 3 这个规则可轻易地从导数的定义和极限的基本性质得到:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(cf(x))}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}\\ &= c \cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x).\end{aligned}$$

规则 4 这里还是导数的定义和极限的基本性质起了作用:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(f(x) + g(x))}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\\ &= f'(x) + g'(x).\end{aligned}$$

规则 1 的逆也成立是我们在后面需要的一个重要结果.

命题 7.3 *如果 $f(x)$ 是可微函数并且对所有 x 有 $f'(x) = 0$,则对某个常数 c 有 $f(x) = c$,即 f 是个常值函数.*

虽然它的证明的细节省略了,然而此命题的直观背景却是简单的. 由于 f 在所有点的导数为 0,故此曲线的所有切线必都是水平的. 这只有一种情形下才会发生,即曲线自身必定是一条水平直线,即对某个 c 有 $f(x) = c$.

§7.1 的习题

利用初级规则,凭眼力计算下列函数的导数. 用你的 CAS 检验你的答案.

(1) $3x^5 - 2x^2 + 1$.
(2) $17x^2 + 2$.
(3) $x^{100} + 57$.
(4) $x^{15} + 3x^{-7} - 11$.
(5) $2x^{-5} + 3x^{-1} + 5$.
(6) $x^{-100} + 8$.
(7) $-2x^{1.1} + 5x^{7.009}$.
(8) $2x^{-7.81} + \pi x^5$.
(9) $(3.1)x^{-0.001} + 11$.
(10) $-(1.2)x^{-0.001} + 1590$.
(11) $\frac{1}{x^2} + 5x + 3$.
(12) $\frac{7}{x^{100}} - \frac{2}{x^4} + 1.3$.

(13) $x^{1/3}$. (14) $\frac{1}{\sqrt{x}}+x^{3/4}$. (15) $2x^{-5/4}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$.

7.2 乘积规则和商规则

现在我们提出三个规则,它们对于计算更为复杂的函数的导数是至关重要的. 尽管这些规则所具有的形式不完全是直观的,然而我们却开始领悟到了微分运算的本质. 在规则 6 和规则 7 中我们假定 $g(x)\neq 0$.

规则 5(乘积规则) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)\cdot g(x))=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$,

规则 6 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{g(x)}\right)=-\frac{g'(x)}{g(x)^2}$,

规则 7(商规则)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

这些结果让我们能计算一大类函数的导数. 我们从几个例题开始.

例 7.4 $(x^3+2)(x^{19}-3x+1)$ 的导数可以很快看出为

$$3x^2(x^{19}-3x+1)+(x^3+2)(19x^{18}-3).$$

例 7.5 $\frac{1}{x^4+2}$ 的导数由 $-\frac{4x^3}{(x^4+2)^2}$ 给出.

例 7.6 商 $\frac{x^2}{x^4+2}$ 的导数是

$$\frac{2x(x^4+2)-x^2(4x^3)}{(x^4+2)^2}.$$

验证规则 5 ~ 7.

规则 5 要证明乘积规则我们需要一点小技巧的帮助以及证明前面规则时使用过的那些基本技术.

$$\frac{\mathrm{d}(f(x)g(x))}{\mathrm{d}x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)\overbrace{-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}^{\text{小技巧:加0}}-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}g(x+h)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=g(x)f'(x)+f(x)g'(x).$$

规则 6 我们把这个证明留给读者.

规则 7 由于$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$,我们可以将规则 5 与规则 6 结合起来验证此规则.

§7.2 的习题

对下面每对函数$f(x)$和$g(x)$计算$f(x)\cdot g(x)$,$g(x)^{-1}$和$f(x)/g(x)$的导数. 用你的 CAS 验证你的答案.

(1) $f(x)=x^7+3, g(x)=2x^3+1.$

(2) $f(x)=3x^2-5, g(x)=3x^6-x.$

(3) $f(x)=\frac{2}{x^4}+1, g(x)=11x^3+2x+1.$

(4) $f(x)=10x^{0.1}+3, g(x)=x^{1.9}-2.$

凭眼力计算下列函数的导数.

(5) $\frac{\sqrt{x}+3}{x^5-1}.$

(6) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+2x^4}.$

(7) $\frac{x^{2/3}-11}{x^{2/3}+11}.$

(8) $\frac{3\sqrt{x}+x^{17}}{4x^5-2x+3}.$

(9) $\frac{1/x-3/x^2}{x^2+1}.$

(10) $\frac{x^{-0.3}+4x^{1.9}}{\sqrt{x}+1}.$

(11) 将x^2表示为$x^2=x\cdot x$,然后用乘积规则计算x^2的导数.

(12) 将x^3表示为$x^3=x^2\cdot x$. 用乘积规则计算x^3的导数.

(13) 假设等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^N=Nx^{N-1}$$

成立. 对任意$N>1$. 使用乘积规则证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{N+1}=(N+1)x^N.$$

注意到习题(11) ~ (13) 给予了规则 2 对所有正整数N的一个归纳证明.

(14) 验证等式$(f\cdot g\cdot h)'=f'gh+fg'h+fgh'$.

(15) 用习题(14) 的等式计算$(x^{10}+18)\cdot\sqrt{x-1}\cdot(1/x^4+6x-2)$的导数.

(16) 用习题(14) 的等式和商规则计算函数$1/(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$的导数.

7.3 链规则

在解决了和与乘积的导数后,还要着手解决两个函数复合的导数. 由于函数的复合(在实数代数中)没有类比物,后面的这些规则完全不是显而易见的. 它们的验证颇为麻烦,我们将其省略.

规则 8(链规则) $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$,

规则 9(另一种形式) $\dfrac{\mathrm{d}(f\circ g)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g(x)}\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.

注 一般地,回想到记号$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$只不过表示$f$在点$x$的导数,即$f'(x)$而已. 我们当然也可考虑$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w}$,其中$w$是某个其他使人感兴趣的点. 因此出现在链规则中的另一种形式的记号$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g(x)}$,按定义是$f$在点$g(x)$的导数.

例 7.7 设$f(x)=x^{25}+2x^{10}-1$,$g(x)=x^{10}-11$. 计算$(f\circ g)'(x)$.

看到$f'(x)=25x^{24}+20x^{9}$和$g'(x)=10x^{9}$时,链规则让我们很容易算出所要的导数:

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x)&=f'(g(x))\cdot g'(x)\\&=(25g(x)^{24}+20g(x)^{9})\cdot 10x^{9}\\&=(25(x^{10}-11)^{24}+20(x^{10}-11)^{9})\cdot 10x^{9}.\end{aligned}$$

如果我们想到直接微分$(f\circ g)(x)=(x^{10}-11)^{25}+2(x^{10}-11)^{10}-1$的全部工作,那么链规则的威力和用处便很明显了.

例 7.8 设$f(x)=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$,$g(x)=x^{43}-3x^{11}+2$. 计算$(f\circ g)'(x)$.

由于$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$和

$$f'(g(x))=\frac{1}{3}(g(x))^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}(x^{43}-3x^{11}+2)^{-\frac{2}{3}},$$

链规则告诉我们所要的导数是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((x^{43}-3x^{11}+2)^{\frac{1}{3}})=\frac{1}{3}(x^{43}-3x^{11}+2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(43x^{42}-33x^{10}).$$

下面的命题或许是最经常使用的链规则的推论.

命题 7.9 设$g(x)$为一可微函数,N为一实数,使$g(x)^{N}$有明确定义. 于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)^N = Ng(x)^{N-1} \cdot g'(x).$$

证明　设$f(x) = x^N$,我们看到$f(g(x)) = g(x)^N$. 由于

$$f'(x) = Nx^{N-1},$$

应用链规则便得到想要的公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)^N = (F \circ g)'(x)$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) = Ng(x)^{N-1} \cdot g'(x).$$

例 7.10　$f(x) = (x^3 + 2x + 1)^{1000}$ 的导数是什么？

在这个例题中我们可用命题 7.9 不费劲地算出这个导数：

$$1000(x^2 + 2x + 1)^{999} \cdot (3x^2 + 2).$$

（值得思考一下，没有链规则这个计算会有多可怕！）

例 7.11　计算$f(x) = \sqrt{x^5 - 3}$ 的导数.

为了在此例中应用命题 7.9 我们首先将$f(x)$ 重写为形式$f(x) = (x^5 - 3)^{\frac{1}{2}}$. 在这样做好后我们看到.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^5 - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5x^4 = \frac{5x^4}{2\sqrt{x^5 - 3}}.$$

§7.3 的习题

计算习题(1) ~ (15) 中函数的导数而不用化简你的答案. 用 CAS 检查你的结果.

(1) $(2x^{19} - 2x^2 + 1)^{10}$.　(2) $(8x^4 - 2)^5$.　(3) $(2x^3 + 1)^{-10}$.

(4) $\sqrt{x^{11} - 3x + 7}$.　(5) $(x^2 + 1)^{-2/3}$.　(6) $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$.

(7) $(2x^{40} - 3.01)^{-0.23}$.　(8) $(x^\pi + 1)^\pi$.　(9) $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{21}$.

(10) $\frac{1}{\sqrt{x^3 - 2}}$.　(11) $\frac{5x + 1}{(x^4 - 3x + 1)^{10}}$.　(12) $(3 + \sqrt[3]{x})^{500}$.

(13) $\sqrt{1 + \sqrt{\sqrt{x}}}$.　(14) $\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}$.　(15) $\sqrt{2 + \sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}}$.

对下列的每对函数计算$(f \circ g)'(x)$. 用 CAS 验证你的答案.

(16) $f(x) = 2x^3 - 3x + 1, g(x) = 5x^2 + x - 10$.

(17) $f(x) = (x + 1)^5, g(x) = (\sqrt{x + 1})$.

(18) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}, g(x) = x^3 - 2$.

(19) $f(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3, g(x) = x^{2/3} - 3$.

(20) $f(x) = (x^3+1)^{100}, g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$.

(21) $f(x) = (x^3+1)^{-100}, g(x) = x^{1.1} + 3$.

7.4　三角函数的导数

有两个基本规则支配了三角函数的微分.

规则 10　$\dfrac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos x$.

规则 11　$\dfrac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin x$.

在验证最后面的这些等式之前,让我们观察下面的事实,即结合这两个规则和前面的那些规则,我们能相对容易地对几乎任意的三角函数进行微分.

例 7.12　证明 $\dfrac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x)$.

因为 $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$,我们可用商规则连同规则 10 和规则 11 来计算 $\tan(x)$ 的导数:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) &= \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{(\cos(x))^2}\\ &= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).\end{aligned}$$

例 7.13　计算 $f(x) = \cos(x^4 + 3x - 1)$ 的导数.

为了应用链规则,令 $f(x) = \cos(x), g(x) = x^4 + 3x + 1$. f 和 g 的导数为 $f'(x) = -\sin(x), g'(x) = 4x^3 + 3$,最后有

$$\frac{d(f\circ g)}{dx} = -\sin(x^4+3x+1)\cdot(4x^3+3).$$

为了证明三角函数的微分规则,我们将需要一个重要引理.

引理 7.14　下面的极限成立:

$$\lim_{h\to0}\frac{\sin(h)}{h} = 1,\quad \lim_{h\to0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0.$$

证明　$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$ 已在 §4.2 中得到证明. 第二个极限需要少量的技巧:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\cdot\overbrace{\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1}}^{\text{技巧:乘以1}}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2(h)-1}{h\cdot(\cos(h)+1)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h)+1)}\\&=\left(\lim_{h\to 0}\frac{-\sin(h)}{h}\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1}\right)\\&=-1\cdot\left(\frac{0}{1+1}\right)=0.\end{aligned}$$

验证规则 10 和 11.

首先注意到规则 11 可由规则 10 和公式

$$\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)$$

得到,这是因为这些等式让我们进行推导:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x).$$

当我们回想起经典的三角公式

$$\sin(x+h)=\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)$$

时,规则 10 的证明进行如后:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(x))&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{[\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)]-\sin(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)-\sin(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\sin(h)}{h}\\&=\sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\\&=0+(\cos(x))\cdot 1\\&=\cos(x).\end{aligned}$$

§7.4 的习题

计算下列函数的导数. 用 CAS 检验你的答案.

(1) $\cos(x^4+3x^2-2)$. (2) $\sin(2x^{19}-3x^5-2x+11)$. (3) $\tan(x^3+3x^2-6)$.

(4) $\cot(x^2+2)$. (5) $\cos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. (6) $\sin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

(7) $\cos(\cos(x))$. (8) $\cos(\cos(\cos(x)))$. (9) $\sin(\sin(x^2+2))$.

(10) $\sqrt{(\sin(x))^3+3x}$. (11) $(\sin(x^4+2))^{3/4}$ (12) $\cos(\cos(x^{10}-3x^2+2))$.

(13) $\tan(\sqrt{x^3+2})$. (14) $\cot(\sqrt[3]{x^3-3x+2})$. (15) $\frac{\sin(x)}{\cos(x)-\sin^2(x)}$.

(16) $\frac{\cos(x)+3}{\sqrt{x}+2}$. (17) $\sin(x)\cdot(\cos(x))^3$. (18) $(1+3\cos(x))^{20}$.

(19) $(\cos(x^2+1))^3$. (20) $\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$.

第七章的附加习题

(1) 利用导数规则得出 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的导数,其中 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_0$ 为与 x 无关的常数. 用你的 CAS 验证你的答案.

(2) 设 $f(x)=6x^4-x^2$. 求使得 $f'(x)=0$ 的 x 值. 用你的 CAS 作 $f'(x)$ 的图像.

(3) 设 $f(x)=x^4-1$.

(a) 这个函数有什么几何性质?关于 f 的图像这个性质表明了什么?

(b) 如果你已经导出了 f 在点 x 的导数,你能推断出在点 $-x$ 的导数(但不要重新进行计算)吗?

(c) 用你的 CAS 作 $f'(x)$ 的图像. $f'(x)$ 具有什么几何性质?

(d) 你能用导数的极限定义推广上面问题的答案吗?

(4) 设 $f(x)=x^5+2x^3-x$. 像你在习题(3) 所做的那样,对此函数回答前面的四个问题.

(5) 用导数的极限定义证明复合函数的微分规则,即

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x).$$ 对 $f(x)=3x+4,g(x)=x^2+4x$

得出 $(f\circ g)'$. 用你的 CAS 验算结果.

(6) 假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为这样的函数:在它们的公共定义域中满足 $f'(x)=g'(x)$. 你能得出 $f(x)=g(x)$ 的结论吗?提示:取 $h(x)=f(x)-g(x)$ 并利用微分规则.

(7) 在你的 CAS 上对 $f(x)=\frac{1}{x^2-a}$ 得出 $f'(x)$,其中 a 是一个正常数. 二阶导数 $f^{(2)}(x)$ 被定义为 $f'(x)$ 的导数等等, f 的 n 阶导数为 $f^{(n)}(x)$. 用你的 CAS 得出所给函数 f 的前 6 阶导

数. 你能看出一种模式吗?你能推断出 $f^{(n)}(x)$ 的一个公式吗?

(8) 设 $f(x)=(x-1)^2(x^3-4x-2)$. 称 $x=1$ 为 f 的一个二重根. 在你的 CAS 上作 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的图像. 关于 $f(1)$ 和 $f'(1)$ 你注意到了什么?得出 $f^{(2)}(x)$ 而后 $f^{(2)}(1)$.

对下列函数计算 $(f\circ g)'$.

(9) $f(x)=\cos(x^2+3)$, $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

(10) $f(x)=x^3-9x^2+27x-27$, $g(x)=x^{1/3}+3$.

(11) $f(x)=\dfrac{3x-12}{x-2}$, $g(x)=\dfrac{2x-12}{x-3}$.

(12) 假设 $(f\circ g)'=1$. 你能推出 f 和 g 互为逆的结论吗?

(13) 假设 $(f\circ g)'=0$. 你能推出 f 或 g 两者之一为常数吗?

在下列问题中求所给曲线在所给点上的切线方程.

(14) $y=\cos(\pi(x^2-1))$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$.

(15) $y=\tan(\sqrt{x})$, $\left(\dfrac{\pi^2}{9},\sqrt{3}\right)$.

(16) $y=\dfrac{3-x}{2+x}$, $\left(1,\dfrac{2}{3}\right)$.

(17) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$, $(4,\sqrt{3})$.

(18) $y=\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{3}(x^3+2x+1)\right)\right)^{10}$, $\left(0,\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}\right)$.

第八章　隐函数及其导数

8.1　隐函数

假定我们已知一个包含x和y的方程. 如果可能解出用x表示的y,那么我们便定义了y为x的函数. 这样得到的函数被称做由此方程**隐式**定义的.

例 8.1　考虑方程

$$-x^2+2x+y^2=3.$$

解出用x表示的y得到

$$y=\sqrt{x^2-2x+3}.$$

注　像我们曾在§1.2例1.8中看到过的那样,有许多可能的平方根函数. 因而方程$-x^2+2x+y^2=3$隐式地定义了许多可能的函数. 经常用到的一个简单约定是总取正的平方根函数.

8.2　隐式微分

隐式微分是快速计算隐函数的导数的方法.

例 8.2　例8.1中隐函数的导数是什么?

解决这个问题的一种方式是直接微分$y=\sqrt{x^2-2x+3}$从而得到

$$\frac{1}{2}(x^2-2x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-2).$$

我们现在指出解决此问题的另一种方法，它叫做**隐式微分法**. 从考虑原来的方程.

$$-x^2+2x+y^2=3$$

着手. 当我们把 y 作为 x 的函数解出时我们得到了 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 为某个函数，在这里就是 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$. 引人注目的是，隐式微分的四步法(详情见后)不需要知道函数 f 是什么. 我们需要知道的全部是某个函数 f 是存在的.

第 1 步　在原来方程中用 $f(x)$ 替换 y. 这产生了

$$-x^2+2x+f(x)^2=3.$$

第 2 步　用微积分规则在方程两边作关于 x 的微分(因为上述方程的两边都是 x 的函数，故这样做是有效的). 我们得到

$$-2x+2+2f(x)f'(x)=0.$$

第 3 步　解出 $f'(x)$. 这只不过需要简单的代数.

$$2f(x)\cdot f'(x)=2x-2,$$

$$f'(x)=\frac{2x-2}{2f(x)}=\frac{x-1}{f(x)}.$$

第 4 步　将 $f(x)$ 换为 y 得到:

$$y'=\frac{x-1}{y}.$$

注　在用 $\sqrt{x^2-2x+3}$ 替换 y 后，这个结果与前面求得的解

$$\frac{1}{2}(x^2-2x+3)^{-\frac{1}{2}}.$$

$(2x-2)$ 一致.

例 8.3　计算由 $y^7-8x^4y^3+2y+x^3=3$ 隐式定义的函数(同时包含 x 和 y 的表达式)的导数 y'.

第 1 步　将 y 换作 $f(x)$ 得到

$$f(x)^7-8x^4f(x)^3+2f(x)+x^3=3.$$

第 2 步　方程的两边对 x 进行微分:

$$7f(x)^6f'(x)-32x^3f(x)^3-24x^4f(x)^2f'(x)+2f'(x)+3x^2=0.$$

第 3 步　解出 $f'(x)$:

$$7f(x)^6f'(x)-24x^4f(x)^2f'(x)+2f'(x)=32x^3f(x)^3-3x^2,$$

$$[7f(x)^6-24x^4f(x)^2+2]\cdot f'(x)=32x^3f(x)^3-3x^2,$$

因而

$$f'(x) = \frac{32x^3f(x)^3 - 3x^2}{7f(x)^6 - 24x^4f(x)^2 + 2}.$$

第4步 用 y 替换 $f(x)$ 得出解:

$$y' = \frac{32x^3y^3 - 3x^2}{7y^6 - 24x^4y^2 + 2}.$$

注 在此问题中不可能求出 $f(x)$. 此方程不能解出!

提问 例 8.3 中隐式定义的函数在点(1,1) 的导数是什么?

回答 在上面第4步得到的解中直接代入给定值 $x = 1$ 和 $y = 1$ 便得到在点(1,1) 的导数值:

$$y' = \frac{32 - 3}{7 - 24 + 2} = -\frac{29}{15}.$$

§8.2 的习题

在习题(1) ~ (9) 中,以两种不同的方式计算下列函数的 y'. 首先用将 y 作为 x 的函数解出,而后用隐式微分的四步法.

(1) $x + y^2 = 1$.
(2) $x^2 + y^2 = 1$.
(3) $xy = 1$.
(4) $xy^2 = 1$.
(5) $xy^2 = 2$.
(6) $xy^4 = 3$.
(7) $y^2 + 2xy + x^2 = 1$.
(8) $x^2y^3 = x - 2$.
(9) $y^2 - 3x^2y - 2 = 0$.

在习题(10) ~ (15) 中用四步算法对方程(作为同时包含 x 和 y 的表达式) 计算 y':

(10) $x \cdot \cos(x) + y \cdot \cos(x) = 13$.
(11) $y^7 - 2x^3y^4 + 3xy^2 + x^5 = 3$.
(12) $x^2y + y\tan(x) = y^3$.
(13) $e^{xy^2} + 2\cos(x^3y) = 4$.
(14) $\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = y^3$.
(15) $2^{x^2+y^2} = 17$.

(16) 对由方程 $x^3 + y^3 = 1$ 隐式定义的函数求在点 $\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$ 的 y'.

(17) 求曲线 $(\cos(\pi x))^2y + y^3 = x + 10$ 在点 $x = 0, y = 2$ 的切线方程.

(18) 求曲线 $(\sin(2x)) \cdot xy + y^4 = x + 1$ 在点 $x = 0, y = 1$ 的切线方程.

(19) 证明由方程 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ 与 $x^2 + y^2 - 20x - 28y + 196 = 0$ 定义的两个圆在点(4.6) 相切.

8.3 指数函数,自然对数函数和双曲函数

§1.4 中曾对 x 为有理数时定义了指数函数 a^x. 我们能够把此定义拓展到 x

为无理数的情形，方法是令

$$a^x = \lim_{x' \to x} a^{x'},$$

其中极限是在趋向于 x 的有理数上取的. 例如，如果 $x = \pi = 3.14159\cdots$，我们可以通过趋向于 π 的有理数.

$$x' = 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \cdots \to \pi.$$

问题　a^x 的导数是什么?

由定义，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x &= \lim_{h \to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h}\\ &= \lim_{h \to 0}\frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h}\\ &= a^x \cdot \lim_{h \to 0}\frac{a^h - 1}{h}.\end{aligned} \tag{8.1}$$

因此我们把计算 a^x 的导数问题简约为计算 $\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{a^h - 1}{h}$ 的问题.

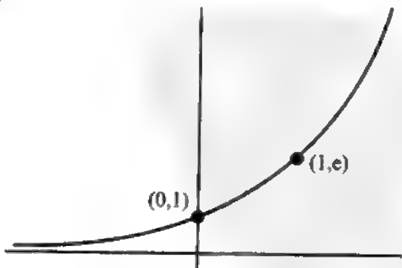
定义　*数 e 被定义为满足性质*

$$\lim_{h \to 0}\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1 \tag{8.2}$$

的唯一的实数.

e 的存在性和唯一性的证明被推延到 §17.1 中. 虽然如此，还是可以知道 $\mathrm{e} > 1$；这是因为不然的话，$\dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$ 会趋向于一个非正数. 可以进一步证明 $\mathrm{e} \approx 2.718\cdots$. $f(x) = \mathrm{e}^x$ 的图像可描画于下.

把方程(8.1) 和(8.2) 联合起来便推导出下述命题.



命题 8.4

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x.$$

例 8.5　计算 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{(x^4 - 2x + 1)}$.

利用链规则可以轻易完成计算：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{(x^4 - 2x + 1)} = (4x^3 - 2)\mathrm{e}^{(x^4 - 2x + 1)}.$$

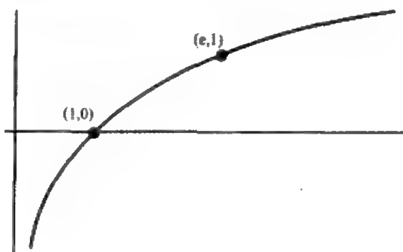
下一步要考虑指数函数的逆，这是另一个突出而重要的例子.

定义 定义 e^x 的逆函数为 $\ln(x)$,称做**自然对数函数**. 它满足下面等式:

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

自然对数函数的图像被画在下面.



方程

$$e^{\ln(x)} = x$$

实际上隐式地定义了 $\ln(x)$ 为 x 的函数. 将此方程的两边对 x 微分(运用链规则和命题 8.4),便得到

$$\frac{d}{dx}e^{\ln(x)} = e^{\ln(x)} \cdot \left(\frac{d}{dx}\ln(x)\right) = x \cdot \left(\frac{d}{dx}\ln(x)\right) = 1,$$

因而我们已经证明了

命题 8.6

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

e 的另一个可供选择的描述由下面的命题给出.

命题 8.7(数 e 的另一个定义) 数 e 可用后面的极限表达:

$$e = \lim_{h \to 0}(1 + h)^{\frac{1}{h}}.$$

证明 由于 $(1+h)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{\ln(1+h)}{h}}$,因而只要证明 $\lim\limits_{h \to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. 就够了. 但是因为 $\ln(1) = 0$,我们看出

$$\lim_{h \to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}\ln(x)\bigg|_{x=1} = 1.$$

现在我们到了微分一般指数函数 $f(x) = a^x$ 的时候了.

命题 8.8 给定一个正实数 a. 于是

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot (\ln a).$$

证明 由于 $a = e^{\ln(a)}$,故 $a^x = e^{\ln(a)\cdot x}$. 我们通过微分最后一个等式的两边可以得到想要的结果:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}a^x &= \frac{d}{dx}e^{\ln(a)\cdot x}\\ &= \ln(a)\cdot e^{\ln(a)\cdot x}\\ &= \ln(a)\cdot a^x.\end{aligned}$$

例 8.9 计算$\frac{d}{dx}x^x$.

为了把 x^x 转换为能够处理的形式,我们从 $x = e^{\ln(x)}$ 这个事实开始,然后把两边都取 x 幂,得到等式 $x^x = e^{\ln(x)\cdot x}$. 最后用链规则微分等式两边的函数:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^x = \frac{d}{dx}e^{\ln(x)\cdot x} &= \left(\frac{d}{dx}(\ln(x)\cdot x)\right)\cdot e^{\ln(x)\cdot x}\\ &= \left(\frac{1}{x}\cdot x + \ln(x)\cdot 1\right)x^x\\ &= (1 + \ln(x))x^x.\end{aligned}$$

例 8.10 计算$\frac{d}{dx}(\ln(x) + x^4)^{10}$.

用链规则我们算出

$$\frac{d}{dx}(\ln(x) + x^4)^{10} = 10(\ln(x) + x^4)^9 \cdot \left(\frac{1}{x} + 4x^3\right).$$

例 8.11 计算$\frac{d}{dx}(x^2+1)^x$.

由于 $e^{\ln(Y)} = Y$ 对任意 Y 都成立,我们可以写成 $x^2 + 1 = e^{\ln(x^2+1)}$ 及

$$(x^2+1)^x = e^{(\ln(x^2+1))\cdot x}$$

用链规则微分便产生了

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2+1)^x &= \frac{d}{dx}e^{(\ln(x^2+1))\cdot x}\\ &= \left(\frac{2x}{(x^2+1)} + \ln(x^2+1)\right)\cdot e^{(\ln(x^2+1))\cdot x}\\ &= \left(\frac{2x}{(x^2+1)} + \ln(x^2+1)\right)(x^2+1)^x.\end{aligned}$$

注 应该看到,一般情形下,要微分$f(x) = g(x)^x$,我们首先将$f(x)$表示为

$$f(x) = e^{\ln(g(x))\cdot x},$$

然后再使用链规则.

双曲函数

人们发现某些指数函数的组合其表现非常相似于经典的三角函数. 为方便起见,这些函数的名字由在一个三角函数的名字后面加上字母 h(它代表了 hyperbolic,即双曲线) 得到.

定义 *基本的双曲函数定义如下:*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

立刻能够验证

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x), \frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x),$$

以及

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{(\cosh(x))^2}.$$

要了解双曲函数和经典三角函数的进一步的类比可参看本节的习题(13) ~ (16).

§8.3 的习题

计算下列函数的导数. 用你的 CAS 检查你的答案.

(1) $y = e^{x^3}$. (2) $y = e^{3x^2+3}$. (3) $y = 2^{x^2}$.

(4) $y = x^{2x}$. (5) $y = x^{x^2}$. (6) $y = \ln(3x^2 + 2)$.

(7) $y = (\ln(2x^4 - 1))^2$. (8) $y = (\ln(x))^x$. (9) $y = (x^2 + \cos(x))^x$.

(10) $y = \ln(x)/\sqrt{e^x}$. (11) $y = \cos(\ln(x^2 + 1))$. (12) $y = \ln(\sin(e^x))$.

(13) 证明$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$.

(14) 证明$1 - (\tanh(x))^2 = \frac{1}{(\cosh(x))^2}$.

(15) 建立加法公式

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

(16) 计算导数:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x^2), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh(\ln(x)), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x^{-3}).$$

(17) 用你的 CAS 通过计算$(1+h)^{\frac{1}{h}}$, $h = 1/10, 1/20, 1/50, 1/100$ 来近似计算 e. 检查一下是否对这些值有$\frac{e^h - 1}{h} \approx 1$.

8.4 反函数的导数

设f, f^{-1} 为一对在 2.3 节中定义的反函数. 于是必须

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

注意到这些方程隐式地定义了函数$f^{-1}(x)$.

由于反函数是隐式定义的,故在求反函数的导数时我们可以隐式求微分. 那就是说,仍从方程

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

着手,关于 x 求两边的微分得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(f^{-1}(x)) = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

解出最后一个方程便给出了最终的命题.

命题 8.12　设$f^{-1}(x)$ 是一个可微的一对一函数$f(x)$ 的逆. 如果$f^{-1}(x)$ 是可微的则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

注　为了使f^{-1} 的导数在点 x 有定义,必须有$f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

例 8.13　求$f^{-1}(x)$ 的导数,其中$f(x) = x^2$.

有两种解决此问题的办法. 初等的处理方法是看出$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, 因而$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. 但也可用命题 8.12. 由于$f'(x) = 2x$,我们能确定

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x) = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

例 8.14　求$f^{-1}(x)$ 的导数,其中$f(x) = x^3$.

这里我们仅仅应用我们的命题,有$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = 3x^2$,因而

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

注意 $y = \sin(x)$ 是从区间 $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 到区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 的一对一的函数. 因此其逆 $\mathrm{arc}\sin(x)$ 有确切定义,其定义域为区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,而值域为区间 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

例 8.15 计算

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x).$$

为了得到 $\arcsin(x)$ 的导数,再次应用我们的命题,知道在区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

这时可以大大地简化这个解. 由于在区间 $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ 上 $\cos(\theta) \geqslant 0$,我们可以表达

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)},$$

(这里取正的平方根). 由此得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\arcsin(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\end{aligned}$$

它在 $-1 < x < 1$ 范围内成立. 显然,$\arcsin(x)$ 的导数在 $x = \pm 1$ 处没有定义.

§8.4 的习题

对下面的每个函数求其逆函数,并显示其定义域和值域;利用命题 8.12 计算 $f^{-1}(x)$ 的导数.

(1) $y = x^4$. (2) $y = x^N$. (3) $y = \frac{1}{x}$.

(4) $y = e^{x^2}$. (5) $y = \cos(x)$. (6) $y = \tan(x)$.

(7) $y = \sqrt{\sin(x)}$. (8) $y = a^x$. (9) $y = \cot(x)$.

(10) $y = \sinh(x)$. (11) $y = \cosh(x)$. (12) $y = \tanh(x)$.

第八章的附加习题

在习题(1) ~ (4) 中利用隐式微分法求 y 相对于 x 的导数.

(1) $y^3 + 2y = x^4$.

(2) $6x^2 + 6y = 20$.

(3) $6x^3 + 6y = 6xy$.

(4) $5xy = (x - y)^2$.

求下列每对曲线之间的相交角(两个可能的角中的最小者)并用你的 CAS 作出这些曲线.

(5) $2xy + y = 3, 2y^3 - (x + 1) = 0$.

(6) $x^2 + y^2 = 4, y - x = 0$.

(7) $x^2 + y^2 = x + y, y - x^2 = 1/2$.

(8) $x^2 + y^2 - 2xy = x, y - x = 0$.

对习题(9) 和(10),通过用隐式微分法式链规则,得出 y 关于 x 的导数.

(9) $y = \dfrac{1}{u^2 + 1}, u = \dfrac{1}{x - 1}$.

(10) $x = u^3 - u^2, y = u^3 - 2u$.

(11) 假设 $y = xf(x)$. 在你的 CAS 上计算 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \dfrac{d^6y}{dx^6}$.

你看出任何模式了吗?你能找出 $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ 的一个公式吗?

(12) 用隐式微分求曲线 $y^2 - 4y + x^2 - 3 = 0$ 在点(0,1) 点的切线方程.

(13) 在你的 CAS 上作出由 $2(x^2 + y^2)^2 - 25(x^2 - y^2) = 0$ 隐式定义的函数的图像. 用隐式微分求曲线在(3,1) 的切线方程.

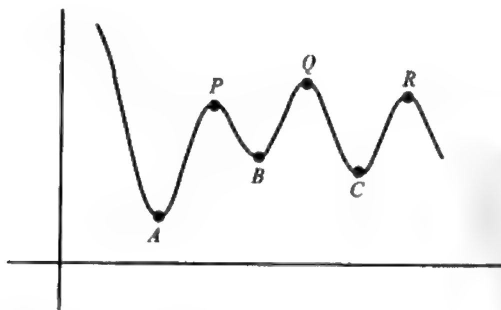
(14) 在你的 CAS 上作由 $2x^{4/3} + 2y^{4/3} = 4$ 定义的函数的图像. 用隐式微分求曲线在(-1,1) 的切线方程. 在点(0,0) 的导数存在吗?

(15) 求由 $4y^2t^2 - (t + 1)y = 3$ 给出的 $\dfrac{dy}{dx}$,其中 t 是一个满足 $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\tan(t)}$ 的可微函数.

第九章　函数的极大值和极小值

9.1　极大值和极小值

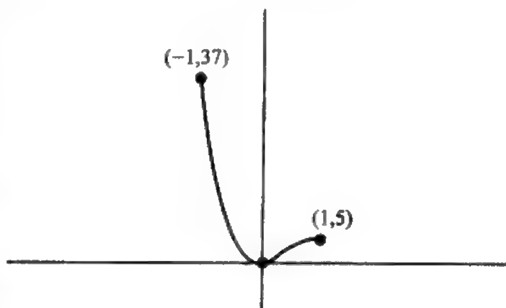
考虑可微函数 $y = f(x)$. $f(x)$ 的图像会展示出各种小山和山谷,如在下图中那样.



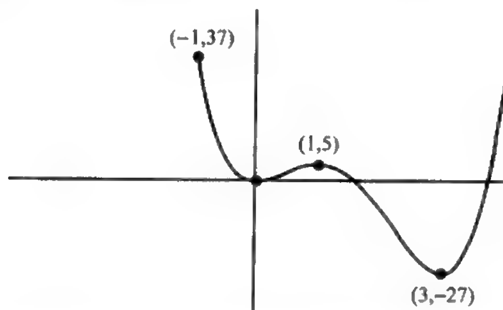
点 P,Q,和 R 和 f 的极大值,它们对应于山顶,而点 A,B 和 C 是 f 的极小值,它们对应于谷底.

如果函数 $y = f(x)$ 是某个商业上的(极度重要的)利润函数,则点 P,Q 和 R 就表示利润达到顶峰的时期而点 A,B 和 C 代表利润达到最低点的时期. 对利润函数进行数学上分析的至关重要的特点是试图预报未来的顶峰. 许多华尔街的

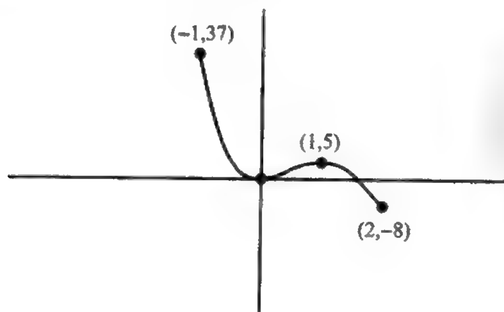
分析师们恰恰把他的一生耗费在这样一种事业中了. 他们的主要工具是微积分——它提供了快速计算函数的极大和极小值的强有力的技术. 我们现在来讲述这个理论.



在处理这个问题时认识到极大和极小值的出现完全依赖于我们所考虑的 x 值的区域是重要的. 举例说,对 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,函数 $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ 在 $x = 0$ 有一个极小值. 扩大这个区域到 $-1 \leqslant x \leqslant 4$,我们看到在 $(3, -27)$ 图像甚至有一个更低的点.



另一方面,如果考虑区间 $-1 \leqslant x \leqslant 2$,则极小值点是此区间的端点 $(2, -8)$.



正是这样的表现迫使我们在开始讨论一个函数的极大和极小值前要详细地指明区间 $a \leqslant x \leqslant b$. 区间的任何改变(即改变 a, b)都会得出完全不同的极大值和

极小值.

定义 固定一个区间 $a \leqslant x \leqslant b$. 定义在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的函数 $f(x)$ 在点 c(其中 $a \leqslant c \leqslant b$) 有一个极大值是指,如果对区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 中的每个 x 有

$$F(c) \geqslant F(x).$$

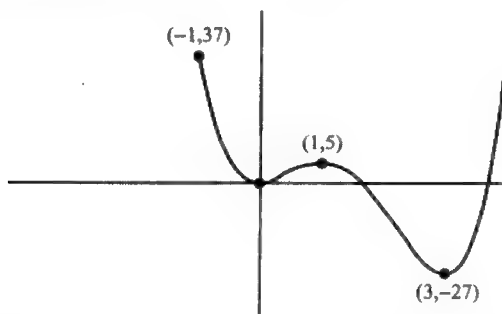
函数 F 在区间 $a \leqslant c \leqslant b$ 中一点 C 有一个极小值是指对所有在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 中的 x 有

$$F(c) \leqslant F(x).$$

现在回到先前的例子

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2.$$

我们看出对区间 $-1 \leqslant x \leqslant 4$ 而言 $(3, -27)$ 是个极小点. 但是在子区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上点 $(0,0)$ 是个极小. 显然如果我们适当地选取一个子区间, 点 $(-1,37)$, $(0,0)$, $(1,5)$, $(3, -27)$ 中每一个都可以是这个函数的一个极大值或极小值. 为了把这个概念分离出来我们需要一个基本定义.



定义 已知一个区间 $a \leqslant x \leqslant b$; 如果 $a < c < b$ 则称点 c 为一个**内点**. 点 a, b 称为**端点**.

上面对函数 $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ 的讨论构成了下面重要定义的动因.

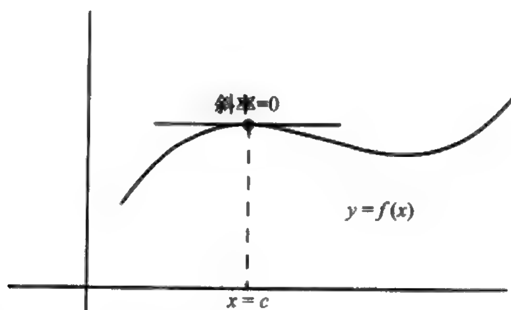
定义 设 $F(x)$ 是定义在某个区间上的函数. 一个点 c 是一个**局部极大**(或**极小**) 点是指存在一个包含点 c 作为内点的子区间, 并且 $x = c$ 是 F 在此子区间上的一个极大(对应地, 极小) 点.

提问 已知一个可微函数 $y = f(x)$, 我们如何计算局部极大和极小?

回答 这个问题提供了应用微积分概念的另一个机会. 直观地看, 当一个人走上一座山, 斜率可能譬如说为 0.5(45° 倾斜). 当这个人趋向山顶时斜率减小, 在最终到达山顶时它为 0. 下山时其斜率当然变为负. 为了正式叙述这个描述, 假定 $x = c$ 是一个可微函数 $f(x)$ 的一个局部极大或极小点并且考虑在 $f(c)$

的切线. 此切线必定是水平的,即其必为斜率 = 0. 用微积分的语言表示这个条件就是

$$f'(c) = 0.$$



我们把这个表示成一个正式的命题:

命题 9.1 设 $f(x)$ 为某个区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的一个可微函数. 如果 $x = c(a < c < b)$ 为 $f(x)$ 的一个局部极大或极小点,则 $f'(c) = 0$.

证明 我们提出对一个局部极大的证明,至于局部极小的情况在本质上是一样的. 对于充分小的 $h \geqslant 0$,我们有

$$f(c+h) \leqslant f(c).$$

这是因为 $f(c)$ 是一个局部极大. 从而 $f(c+h) - f(c) \leqslant 0$,除以 $h > 0$,我们知道有

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0.$$

回想起极限与序列的选取无关,我们的结论是

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0.$$

如果现在选取 $h < 0$(且 $|h|$ 充分小),我们必定仍然有不等式

$$f(c+h) \leqslant f(c),$$

因而 $f(c+h) - f(c) \leqslant 0$. 除以 $h < 0$ 便反转了这个不等式,从而有

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0.$$

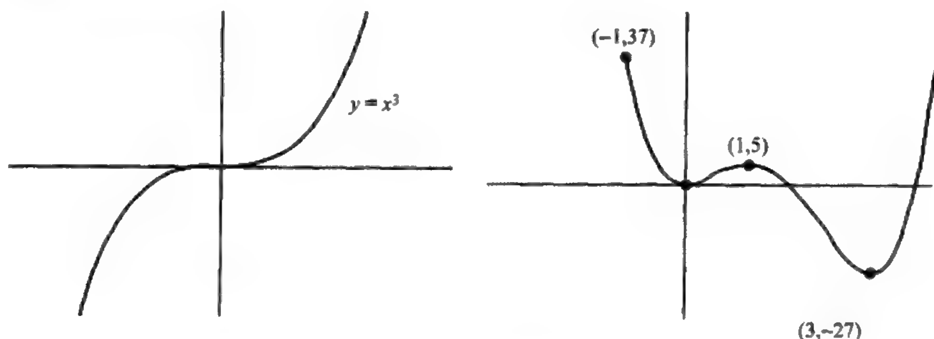
因此,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0,$$

而且因为极限是唯一的,我们的结论是

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0.$$

警示 如果$f(x)$在$x=c$有一个局部极大值或极小值,则必然有$f'(c)=0$;反过来则未必正确.函数$f(x)=x^3$满足$f'(x)=3x^2$,因而$f'(0)=0$.但$x=0$并不是极大或极小.



例9.2 对曲线$y=3x^4-16x^3+18x^2$验证在点(0,0),(1,5),和(3,−27)有斜率0的切线.

设$f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$.我们计算

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3-48x^2+36x \\ &= 12x(x^2-4x+3) \\ &= 12x(x-1)(x-3), \end{aligned}$$

由此立刻得到$f'(0)=f'(1)=f'(3)=0$.这证实了这些点上的切线为水平的,它使我们得出结论说,点(1,5)是一个局部极大而点(0,0)和(3,−27)为局部极小.

§9.1 的习题

在下列的问题中求出在所列区间中的所有局部极大和极小值.可以用你的CAS快速计算导数和画出函数的图(求极大值和极小值由你自己决定).

(1)$f(x)=x^3-9x^2+30x$, $-4\leqslant x\leqslant 6$.

(2)$f(x)=x^4-2x^3-2x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 3$.

(3)$f(x)=x^5$, $-2\leqslant x\leqslant 2$.

(4)$f(x)=x^4+x^3$, $-3\leqslant x\leqslant 3$.

(5)$f(x)=\cos(x)+x$, $-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$.

(6)$f(x)=\sin(2x)-x$, $-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$.

(7)$f(x)=\ln(x)-x^3$, $0<x\leqslant 3\pi$.

(8)$f(x)=2^x-x$, $-5\leqslant x\leqslant 5\pi$.

9.2　一阶导数判别法

设$f(x)$为定义在区间$a \leqslant x \leqslant b$上的一个可微函数. 假定对区间中某个$c$有$f'(c)=0$. 有三种可能性:或者$x=c$是个局部极大,或局部极小,或者两者都不是,为了得到区分这三种情形的准则,我们需要下面的命题,它将自然地导致一阶导数判别法.

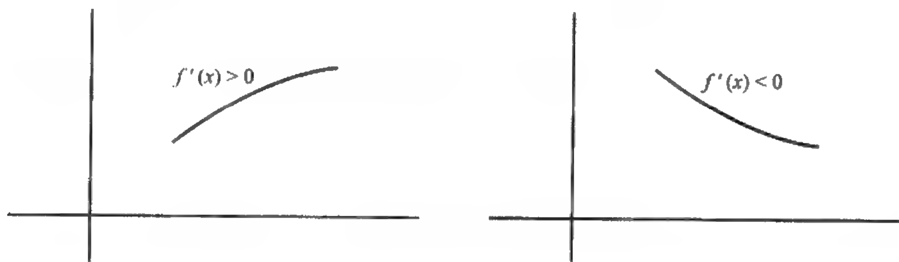
命题9.3　*如果对所有$a \leqslant x \leqslant b$的点有$f'(x)>0$,则$f(x)$在此区间中为增加的递增的,即*

$$f(x_1)<f(x_2),\text{对所有 } a \leqslant x_1<x_2 \leqslant b.$$

如果对所有$a \leqslant x \leqslant b$的点有$f'(x)<0$,则$f(x)$在此区间中为减少的递降的,即

$$f(x_1)>f(x_2)\ \text{对所有 } a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b.$$

用图形表示,一个增函数和减函数分别如下图所示:



证明　我们证明$f'(x)>0$蕴含了$f(x)$为增加的,至于$f'(x)<0$的情况是相似的. 因为由定义

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

故条件$f'(x)>0$蕴含了对所有充分小的$|h|$我们必定有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0.$$

对$h>0$,我们看到$f(x+h)-f(x)>0$,或

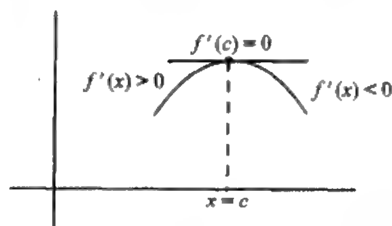
$$f(x+h)>f(x).$$

对$h<0$,符号反转,得出$f(x+h)-f(x)<0$,或$f(x+h)<f(x)$. 因此f在包含x的一个充分小的区间中为增加的. 把这些区间合并在一起我们得出$f(x)$在

整个区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上是递增的.

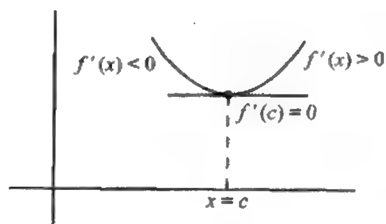
命题9.4(一阶导数判别法) 假定$f'(c)=0$但在c周围的一个小区间中每个其他的x有$f'(x)\neq 0$. 于是在此区间中我们有三种情形:

情形1 如果对$x<c$有$f'(x)>0$而对$x>c$有$f'(x)<0$,则f在$x=c$有一个局部极大值.



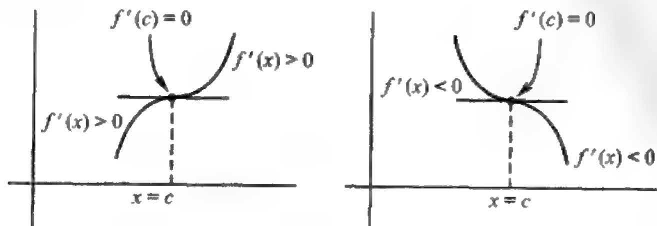
情形1

情形2 如果对$x<c$有$f'(x)<0$而对$x>c$有$f'(x)>0$,则f在$x=c$有一个局部极小值.



情形2

情形3 如果$f'(x)$在c不改变符号,则f在$x=c$既不是一个局部极大也不是一个局部极小.



情形3

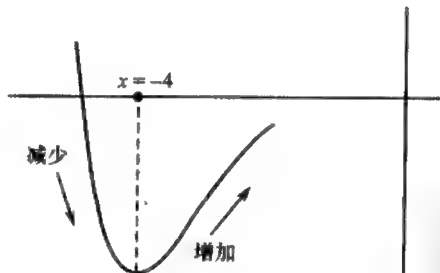
这三种情形可以被形象地看成小山，山谷或拐点. 例如，在情形(1) 中，对 $x < c, f'(x) > 0$，故在曲线上那些从左边趋向$f(c)$ 的点上的切线其斜率为正. 在峰点 $x = c$ 斜率为 0，而对 $x > c, f'(c) < 0$ 从而曲线递降.

例 9.5 设$f(x) = 2 - x^2$. 利用一阶导数判别法确定哪些地方此函数增加，而哪些地方函数减少. 求所有的局部极大和极小值.

首先，$f'(x) = -2x$. 因此只有一个可能的极大或极小点. 对 $x < 0$, $f'(x) = -2x > 0$，故函数增加. 对 $x > 0$, $f'(x) = -2x < 0$，故函数减少. 点 $x = 0$ 必为一极大点. 事实上$f(0) = 2$ 必为此函数的最大值.

例 9.6 设$f(x) = \frac{x^6 - 24x^4}{256}$. 利用一阶导数差别法确定哪些地方此函数增加而哪些地方函数减少. 求所有的局部极大和极小值.

取微分，我们得到$f'(x) = \frac{6x^5 - 96x^3}{256} = \frac{6x^3(x^2 - 16)}{256}$，因此，$f'(0) = 0$, $f'(4) = 0$, $f'(-4) = 0$. 我们现在用一阶微分判别法对这些点中每一个点进行分类. 对 $x < -4$, $f'(x) = \frac{6x^3(x^2 - 16)}{256} < 0$ 从而$f(x)$ 减少. 对 $-4 < x < 0$, $f'(x) > 0$ 故$f(x)$ 现在增加. 因此$x = -4$ 是个局部极小点，其图形在$x = -4$ 的邻域中如同下图：

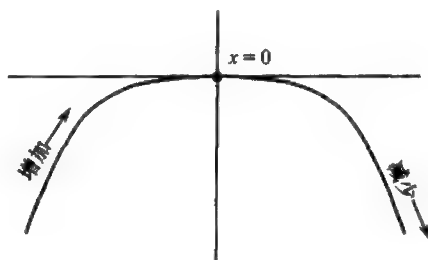


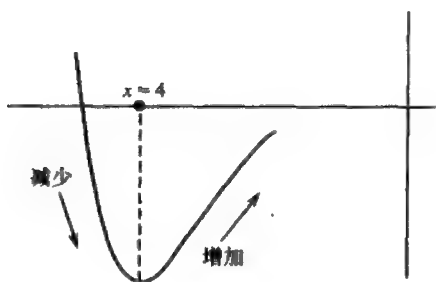
对 $0 < x < 4$, $f'(x) = \frac{6x^3(x^2 - 16)}{256} < 0$，因此一阶导数判别法告诉我们$x = 0$ 是个局部极大点.

以分析点 $x = 4$ 来结束我们的分析. 注意 $x > 4$ 时

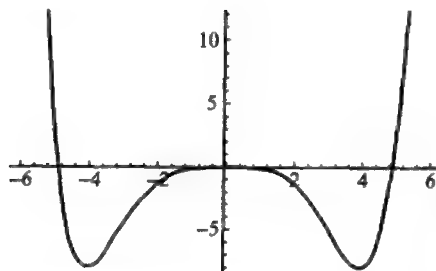
$$f'(x) = \frac{6x^3(x^2 - 16)}{256} > 0,$$

最后一次应用一阶导数判别法使我们知道 $x = 4$ 是个局部极小.





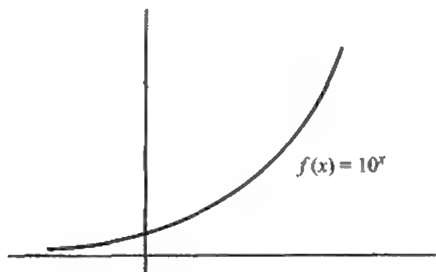
$y = \frac{x^6 - 24x^4}{256}$ 的图像是：



它展示出在 $x = \pm 4$ 的两个局部极小值和在 $x = 0$ 的一个局部极大值.

提问 是否存在一个既无局部极大又无局部极小的函数?

回答 有许多这种函数,一个简单的例子是函数 $f(x) = 10^x$. 要看出在下面的图像中既无局部极大值又无局部极小值,。只要注意到 $f'(x) = \ln(10) \cdot 10^x$,从而对任意 x 有 $f'(x) > 0$.



§9.2 的习题

在下面的问题中用一阶导数判别法求出 $f(x)$ 的局部极大和极小值并进行分类. 使用你的 CAS 快速计算出导数. 用你的 CAS 作 $f(x)$ 的图像以检查你的答案.

(1) $f(x)=5+3x^2$.
(2) $f(x)=3-7x^2$.
(3) $f(x)=x^3-9x^2+30x$.
(4) $f(x)=x^4-2x^3-2x^2$.
(5) $f(x)=x^4+x^3$.
(6) $f(x)=x^5$.
(7) $f(x)=3x^4-20x^3+48x^2-48x+3$.
(8) $f(x)=5x^6-6x^5-45x^4+8$.
(9) $f(x)=\cos(x)-x$.
(10) $f(x)=\sin(3x)+x$.

在下列问题中确定在哪些区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 中函数 $f(x)$ 为增加(或减少). 用你的 CAS 快速算出导数并作函数图以检查你的结果.

(11) $f(x)=2x^2+x+1$.
(12) $f(x)=3-4x^2$.
(13) $f(x)=x^3-9x^2+30x$.
(14) $f(x)=x^4-2x^3-2x^2$.
(15) $f(x)=x^7$.
(16) $f(x)=x^7-11$.
(17) $f(x)=e^x$.
(18) $f(x)=\ln(x),(0<x)$.
(19) $f(x)=\sin(x),(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.
(20) $f(x)=2\cos(x)+x$.

9.3 二阶导数判别法

设 $f(x)$ 是个二次可微函数, $x=c$ 是个满足 $f'(c)=0$ 的点. 确定 $x=c$ 是否是个局部极大或极小的情速方法是二阶导数判别法. 可惜, 尽管此法快捷却不总能产生确定的信息.

命题 9.7(二阶导数判别法) 假定

$$f'(c)=0.$$

如果 $f''(c)>0$ 则 $x=c$ 是个局部极小. 如果 $f''(c)<0$ 则 $x=c$ 是个局部极大.

如果$f''(c)=0$,从此判别法中我们没有得到任何信息.

证明 条件$f'(c)=0$蕴含了当$x\to c$时

$$\frac{f'(x)}{x-c}=\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}\to f''(c).$$

如果$f''(c)>0$,则对非常靠近c的x我们有

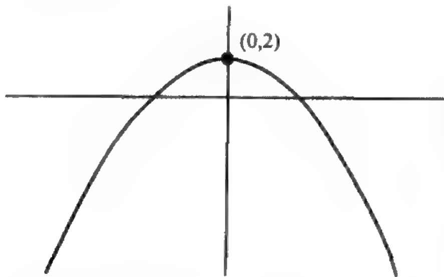
$$\frac{f'(x)}{x-c}>0.$$

因此,如果$x-c>0$则$f'(x)>0$,如果$x-c<0$则$f'(x)<0$. 应用一阶导数判别法,我们得出$x=c$是局部极小的结论. 对$f''(c)<0$的证明是类似的,只是所有符号相反.

警示 如果$f''(c)=0$,则二阶导数判别法失效,而且任何情况都可能发生. 函数$f(x)=x^3$在$x=0$有一个**拐点**,尽管我们有$f'(0)=f''(0)=0$. 函数$g(x)=x^4$在$x=0$有一个局部极小值,而这里有$g'(0)=g''(0)=0$. 函数$r(x)=1-x^4$在$x=0$有一个局部极大,而仍然有$r'(0)=r''(0)=0$. 显然当二阶导数判别法失效时没有其他的选择,只能回到一阶导数判别法,幸运的是,它是屡试不爽的.

例 9.8 用二阶导数判别法求$f(x)=2-3x^2$的极大值和极小值并分类.

由于$f(x)$的导数$f'(x)=-6x$,我们需要决定点$x=0$的性质. 取二阶导数我们有$f''(x)=-6$对所有x成立. 由二阶导数判别法,我们的结论是,$x=0$为一个局部极大. 这个图像被描画于下.



例 9.9 应用二阶导数判别法求$f(x)=2\cos(x)+x$,其中$0\leqslant x\leqslant 2\pi$的局部极大值和极小值并分类.

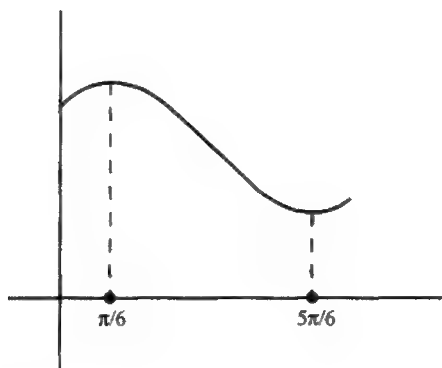
这时$f'(x)=-2\sin(x)+1$,因此在$\sin(x)=\frac{1}{2}$时$f'(x)=0$. 由于我们

是在区间 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 上进行的，仅有的可能解是 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{5\pi}{6}$. 现在我们需要计算 f 的二阶导数，它为 $f''(x) = -2\cos(x)$，在点 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{5\pi}{6}$ 上

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3},$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = +\sqrt{3}.$$

因此 $x = \frac{\pi}{6}$ 是个局部极大点而 $x = \frac{5\pi}{6}$ 是个局部极小点. 我们的函数图描绘于下.

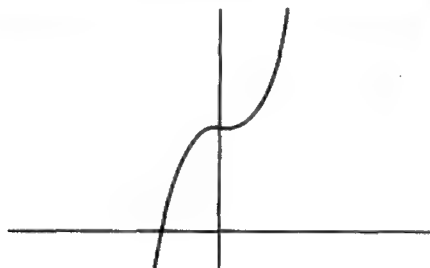


例 9.10　分析函数

$$f(x) = 15x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{x}{90} + 1$$

在区间 $-2 \leqslant x \leqslant 2$ 上的局部极大和极小值.

当我们作出此函数在区间 $-2 \leqslant x \leqslant 2$ 上的图像时，我们得到了



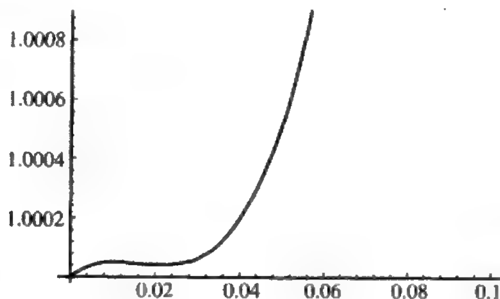
而且难于看出有任何的极大值或极小值. 但是 CAS 能对$f'(x)=45x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{90}$分解因子,

$$f'(x)=\frac{1}{90}(90x-1)(45x-1).$$

这个分解告诉我们存在使导数消失的点:$x=\frac{1}{45}$ 和 $x=\frac{1}{90}$. 现在$f''(x)=90x-\frac{3}{2}$,而且在 $x=\frac{1}{45}$ 和 $x=\frac{1}{90}$ 计算值得到

$$f''\left(\frac{1}{45}\right)=\frac{1}{2},\quad f''\left(\frac{1}{90}\right)=-\frac{1}{2}.$$

于是$x=\frac{1}{45}$是个局部极小点而$x=\frac{1}{90}$是个局部极大. 要发现那些不能立即看出的极大极小多少有点令人困惑. 事实上在第一张图中看不到这些点应归咎于坐标轴上度量的选择——当在区间$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{10}$上作图时我们实际上看到了用导数判别法发现的东西.



§9.3 的习题

在下列问题中用二阶导数判别法求$f(x)$的局部极大和极小值并分类. 用你的 CAS 快速计算函数并分解多项式为因式. 作$f(x)$的图像以检查你的答案.

(1)$f(x)=4x^2-11$.

(2)$f(x)=x^2+6x-3$.

(3)$f(x)=5x^2-3x+11$.

(4)$f(x)=3x^4+16x^3+6x^2-72x$.

(5)$f(x)=x^4+4x^3-8x^2+48x$.

(6)$f(x)=x^3+2x^2+3$.

(7)$f(x)=2\sin(x)+x-2$.

(8)$f(x)=\cos(x)+\sqrt{3}x-1$.

(9) $f(x) = \ln(x) + x^2, (0 < x)$. (10) $f(x) = e^x - 5x + 3$.

(11) $f(x) = 2^x - 3x + 1$. (12) $f(x) = 3\ln(x) - \frac{1}{x} + 2, (0 < x)$.

(13) $f(x) = \tan(x) + \frac{x}{2} + 3$. (14) $f(x) = \tan(x) + \frac{4}{3}x$.

在习题(15) ~ (17) 中，使 $f'(x) = 0$ 那些点靠得非常拢，在一个图形上几乎看不出来. 求出这些局部极大和极小值，并找出一个适当的区间来作函数 $f(x)$ 的图像使得这些极性点可以被看见.

(15) $f(x) = 20x^3 - 181x^2 + \frac{73\,712}{135}x$. (16) $f(x) = x^2(2.204\,8 - 2.8x + x^2)$.

(17) $f(x) = 3\,750x^4 - 30\,200x^3 + 91\,293x^2 - 122\,412x + 11\,111$.

第九章的附加习题

(1) 设 $f(x) = x^2 + px + q$. 求使 $f(1) = 3$ 的 p 和 q 的值. 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 3$ 上有 f 的局部极大和极小值吗?此值为极大还是极小?

(2) 在你的 CAS 上作 $f(x) = 3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ 的图像，然后求出极大值和极小值. **提示：** f 是周期的.

(3) 在你的 CAS 上作

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & \text{如果 } x < 1, \\ -(x-2)(x+1), & \text{其他情形} \end{cases}$$

的图像.

(a) 用观察的方法确定 f 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 6$ 上的极大值.

(b) (a) 的答案与一阶导数判别法或二阶导数判别法矛盾吗?请解释.

(c) 这个例子产生了求可能的极值的准则吗?

(4) 在你的 CAS 上作

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{如果 } x < 2, \\ x^2 - 6x + 13, & \text{如果 } 2 \leqslant x < 4, \\ -x + 9, & \text{其他情形} \end{cases}$$

的图像. 用上面的习题(3) 确定在区间 $0 \leqslant x \leqslant 9$ 上所有可能的极大值和极小值.

(5) 证明 $F(x) = 25\sec(x)$ 在 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 有一个极小值但无极大值. 用你的 CAS 作它的图像.

(6) 用你的 CAS 作 $f(x) = \sin(x^2) \cdot \sec(x)$ 在区间 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 上的图像.

(a) 试对此图决定局部极大和极小值.

(b) 用一阶和二阶导数判别法验证你的结果.(用你的 CAS 验证).

(7) 证明如果f在 $a \leqslant x \leqslant b$ 中连续,在(a,b) 可微且$f(a) = f(b)$,则存一个值$a < x < b$使得$f'(x) = 0$. 这个结果被称做罗尔定理.

(8) 证明中值定理:如果f在 $a \leqslant x \leqslant b$ 连续且在$a < x < b$可微,则存在一个值$a < x < b$值得$f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. 提示:利用罗尔定理.

(9) 证明下面中值定理的推论:如果f在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上连续且对所有$a < x < b$有$f'(x) = 0$,则f在此区间为常数.

在习题(10) ~ (14) 中求$f(x)$ 的局部极大和极小值并分类. 用你的 CAS 作此函数的图像.

(10) $f(x) = \begin{cases} 2x - 7, & \text{如果 } x < 4, \\ x^2 - 6x + 9, & \text{如果 } x \geqslant 4. \end{cases}$

(11) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2, & \text{如果 } x < 2, \\ 9x - 14, & \text{如果 } x \geqslant 2. \end{cases}$

(12) $f(x) = e^{-x}\sin(x), (x \geqslant 0)$.

(13) $f(x) = e^{-x^2}\cos(x)$. 提示:容易找到一个判别点,对其余的,你可考虑 $\tan(x)$ 或求助于你的 CAS.

(14) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2} - 1}{x^2}$.

(15) 你能找到一个函数使它在原点取得绝对极小而处处有$f'' < 0$?给出一个例子或解释为什么不能.

第十章　经典的最优化理论

10.1　求极大值和极小值的三步法

设$f(x)$为定义在$a \leqslant x \leqslant b$上的可微函数. 在第九章已看到$f(x)$在此区间的极大和极小值必定出现在或是端点$x = a, b$之一或是在$f$的导数为0的那些点. 这立刻给予我们一个三步法,它容易由一个CAS施行.

第1步　找出所有的点$a \leqslant c_1, c_2, \cdots, c_m \leqslant b$,其中

$$f'(c_i) = 0 (i = 1, 2, \cdots, m).$$

第2步　计算$\{f(a), f(b), f(c_1), f(c_2), \cdots, f(c_m)\}$.

第3步　在数值的集合$\{f(a), f(b), f(c_1), f(c_2), \cdots, f(c_m)\}$. 中找出最大和最小的数. 这些数对应于此函数的极大值和极小值.

例10.1　求函数$f(x) = x^3 - 3x + 1$在区间$0 \leqslant x \leqslant 3$上的极大值和极小值.

第1步　$f'(x) = 3x^2 - 3$,故$f'(1) = f'(-1) = 0$.

第2步　$f(0) = 1, f(3) = 19, f(-1) = 3$,及$f(1) = -1$.

第3步　f的极大值出现在端点$x = 3$,而f的极小值出现在$x = 1$.

例10.2　求$f(x) = \sin^2(x)$在区间$0 \leqslant x \leqslant 4\pi/3$上的极大和极小值.

第1步　$f'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$,因此$f'(0) = f'(\pi/2) = f'(\pi) = 0$.

第2步　$f(0) = 0, f(\pi/2) = 1, f(\pi) = 0, f(4\pi/3) = 3/4$.

第3步 f 的极大值出现在 $x = \pi/2$,而极小值出现在 $x = 0$ 和 $x = \pi$.

例 10.3 求函数 $f(x) = x \cdot e^{-x}$ 在区间 $-2 \leqslant x \leqslant 2$ 上的极大和极小值.

第1步 $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$,因而 $f'(1) = 0$.

第2步 $f(-2) = -2e^2, f(1) = 1/e, f(2) = 2/e^2$.

第3步 因为 $1/e > 2/e^2$,我们看出 f 的极大值出现在 $x = 1$,而极小值出现在 $x = -2$.

§10.1 的习题

用 §10.1 的三步算法求下列函数 $f(x)$ 在所给区间中的极大值. 用你的 CAS 快速画出这些函数以证实你的计算.

(1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, -5 \leqslant x \leqslant 4$.

(2) $f(x) = x^4 - 32x + 148, 0 \leqslant x \leqslant 3$.

(3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 11, -2 \leqslant x \leqslant 2$.

(4) $f(x) = x^7 - 5x^5 + 13, -3 \leqslant x \leqslant 3$.

(5) $f(x) = \cos^2(x), -\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

(6) $f(x) = \tan(x), -\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

(7) $f(x) = e^x + e^{-x}, 0 \leqslant x \leqslant 6$.

(8) $f(x) = x^2 - \ln(1 + x^2), -1 \leqslant x \leqslant 1$.

(9) $f(x) = \cos(2x) + 2\cos(x), 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

(10) $f(x) = \sin(2x) + 2\sin(x), -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

(11) 设 $f(x)$ 由方程 $e^x = e^y\sin(x)$ 隐式地定义. 求 $y = f(x)$ 在区间 $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}$ 上的极大和极小值.

10.2 数学建模

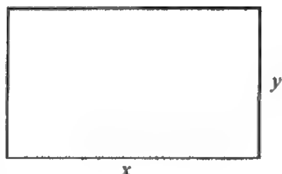
数学建模是一个把现实世界的问题转换成数学问题的过程,而且这个数学问题可通过算法解出. 作为对这个广泛而生动理论的介绍,我们把注意力集中在那些经过转换后可以由 §10.1 中讲述的算法解决的问题.

例 10.4 证明正方形是所有具给定周长的矩形中面积最大的.

解 首先画一个矩形的图.

由于长与宽未知,我们把它们标记为 x 和 y. 现设 P = 周长,这是已知的常数. 由定义, $2x + 2y = P$,因而可以用 x 去表示 y, $y = \frac{P - 2x}{2}$. 现定义(矩形的)面

积函数



$$A(x) = x \cdot y = x \cdot \frac{P - 2x}{2}$$

它是单变量x的函数. 假若$0 \leqslant x \leqslant \frac{P}{2}$,则此函数有确切的定义:如果$x < 0$会有一个负的长度(不存在的)而如果$x > \frac{P}{2}$,则宽$y = \frac{P - 2x}{2} < 0$又是负的(不容许的). 我们现在可以用§10.1的三步法.

第1步 $A'(x) = \frac{P}{2} - 2x$. 因而$A'\left(\frac{P}{4}\right) = 0$.

第2步 $A(0) = 0, A\left(\frac{P}{2}\right) = 0, A\left(\frac{P}{4}\right) = \frac{P^2}{16}$.

第3步 当$x = y = P/4$出现了极大面积,即矩形是个正方形.

注 这个习题的最重要部分是构造面积函数$A(x)$和它的定义区间$0 \leqslant x \leqslant \frac{P}{2}$. 目前还没有足够先进的人工智能系统能够使一台计算机单独解决这类问题. 你能够在你的CAS上偏制三步法的程序(然后用计算机帮助你解决一大类的问题),但提取出这个函数(它是将原始问题转换为一个数学问题)必须由你自己来做.

例10.5 一家服装公司在生产棉T恤,它的前面被熨烫上了小小的情人节图画. 每件恤衫上必须有相同数量的情人节画,而且T恤是按下述方式生产的:(1)所有素色T恤被生产出后它们便立刻被送到了绘画部门,(2)绘画部门把情人节图画(以一种有吸引力的方式)熨烫到每件恤衫上. 假定绘画部门只有10 000件情人节画,而他们要用完它们. 进一步假定要花25分钟生产一件T恤,并且花一分钟熨一个情人节画.

一个特殊顾客紧急预定了100件成品T恤. 公司应该总共生产多少件T恤才能使生产100件成品所花的时间最少.

为了开始解决这个问题,设

x = 总共生产的T恤件数,

y = 每件T恤上情人节画的个数.

现在绘画部门的使用10 000个情人节画的愿望转换成了方程$xy = 10\,000$,而确定生产顾客预定的100件T恤用去时间的函数是

$$f(x) = 25x + 100y = 25x + \frac{10^6}{x},$$

其中 $100 \leqslant x \leqslant 10^4$. 这时我们运用 §10.1 的三步算法.

第 1 步 $f'(x) = 25 - \frac{10^6}{x^2}$,因此 $f'(200) = 0$.

第 2 步 $f(100) = 25 \times 100 + 10^5$, $f(200) = 5\,000 + 5\,000 = 10\,000$ 而 $f(10^4) = 25 \times 10^4 + 100$.

第 3 步 最小值出现在 $x = 200$.

注意当 $x = 200$, $y = 50$,我们的结论是此公司应该生产200件T恤,每件有50个情人节图画.

当做出合理观察时,一个模式从上例中浮现出来了. 一般情形下,当一个问题给出时我们被要求对某些量进行极大化或极小化,而这些量是作为**两个变量**的函数给出的. 除对这个函数的描述之外,我们还知道另外某些信息,把它们转换过来便能让我们导出另外的等式,它涉及到两个变量. 用这个等式我们可解出用另一变量表示的变量. 于是在问题一开始,我们导出的函数可以表示为单变量函数,从而化为可应用 §10.1 的算法的问题.

§10.2 的习题

(1) 求两个正整数,其和为 1 000 而其积为极小(极大).

(2) 求两个正数,其乘积为 1 000 而其和极小.

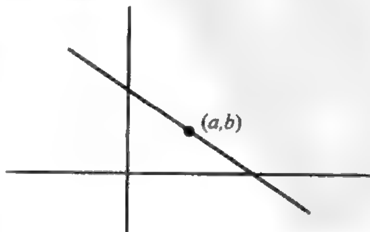
(3) 一个建筑师要设计一个长方形的雪松木壁柜(仑由雪松构成),它依靠高7英尺的墙壁而构建. 假定建筑师正好有 700 平方英尺现成的松材来建此壁柜(壁柜高为 7 英尺),应以什么样的尺寸才能使壁柜的底板面积极大?

(4) 求直线 $y = 4x + 1$ 上一点,使它最靠近点 $(0,18)$.

(5) 给出一条直线 l:$y = mx + b$ 和一个点 $P = (u,v)$,求从点 P 到直线 l 的最短距离,即使 $\sqrt{(u-x)^2 + (v - mx - b)^2}$ 极小. 证明这与纯几何的解是一致的;后者是通过求经过 P 点而垂直于 l 的直线 l',并量度从 P 点到 l' 与 l 交点的距离得到.

(6) 求曲线 $y = 1 - x^2$ 上的一个最靠近点 $(3,1)$ 的点.

(7) 如右图,在第一象限中固定一点 (a,b). 求一条通过 (a,b) 的直线,使它与正向 x 和 y 轴构成的三角形面积最小.



(8) 一个等边三角形内部的长方形,它的一边含于三角形的底边. 这类长方形的最大可能面积是

什么?

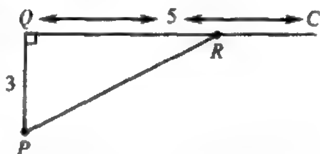
(9) A 国一直对 B 国进行飞行侦察. 在 h 千英尺高度一架飞机能扫描的面积为

$$A(h) = h^2 \cdot e^{\frac{-h}{2000}}$$

平方英尺. B 国安装了卫星及地对空导弹防御系统. 在一些困难的经历之后, A 国了解到下面的东西: 飞行超过 30 000 英尺高时易于使飞机受到卫星的监视; 而飞行低于 7 000 英尺则过于靠近地空导弹防御系统. 在什么高度 h, A 国得到最佳数据?

(10) 一个建屋顶的承包商在为一个固定宽为 40 英尺的建筑物建屋顶时想使成本最小. 从正面看, 此建筑物顶部是一个两端为等腰三角形状的长方形, 三角形有固定面积 1000 平方英尺. 这个倒 V – 形屋顶按什么尺寸才能使其总表面面积最小.

(11) 如右图, 在离岸 3 英里的岛 P 上有一个游泳者; 她能以 1.5 英里/时速度游泳, 以 4 英里/时行走. 她计划游到岸上某处 R, 然后步行到离 Q 正好 5 英里的一家咖啡馆 C. 她应游到处于何处的 R 才能使她的总费时最少?

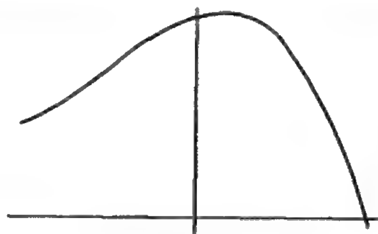


(12) 一个高大的仓库由 8 英尺高的电围栏围起. 围栏离仓库为 20 英尺. 为了监视里面的动态, 联动调查局要在围栏以外的地面上安装一台直接用电线联接到此建筑物的发生器. 电线必须在高出 5 英寸处越过围栏.

(a) 他们可以用的电线的最短长度是多少?

(b) 如果此仓库只有 20 英尺高, 他们可以使用的电线的最短长度是多少? **提示**: 用你的 CAS 解出现在问题中的四次方程.

(13) 一座山的二维模拟图由函数 $f(x) = 50 - x^3 - 3x^2 + 2x$ 的图给出.



如果一位旅行者攀登此山, 找出使旅行者最感困难的图上的点. **提示**: 当切线的斜率最可能大时, 旅行者最感困难.

(14) 一个正项式 $p(x)$ 是具有形式

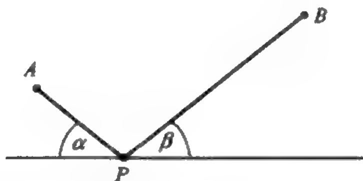
$$p(x) = a_0 + a_1 x^{r_1} + a_2 x^{r_2} + \cdots + a_n x^{r_n}$$

的函数, 其中 $a_i > 0(i = 0,1,2,\cdots,n)$, $r_i(i = 0,1,\cdots,n)$ 是任意实数. 几何规划 (geometric programming) 的一个基本问题是求值 $x \geqslant 0$ 使 $p(x)$ 极小. 对 $n = 2$ 的正项式解此问题.

(15) 一件缟玛瑙的饰物挂件具有冠以半圆于长方形上的形状(假定半圆的直经等于长方形的宽). 饰物的周边被嵌上了一小串珍珠. 要有足够多的珍珠才能盖满4英寸的周长. 要使饰物的表面最大应有什么尺寸(还要能在背面雕刻)?

(16) 一件10厘米长的铂金链被切成了二段. 一段围成了正方形而第二段围成一个圆. 要使这两个形状的面积和取极大,这正方形和圆的尺寸应该多少?

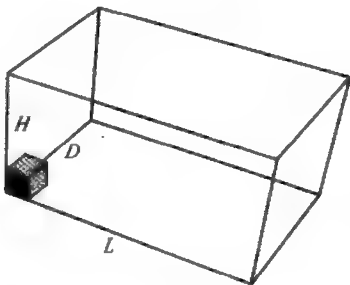
(17) 设 A,B 为在 x 轴同一边的任两个点. 设 P 点在 x 轴上,使得距离 AP 与 BP 的和最小. 证明这时下图中的角 α 等于角 β.



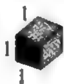
(18) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意实数. 求实数 x,它使得和 $(x-a_1)^2+\cdots+(x-a_n)^2$ 最小.

10.3 曲面面积和体积问题

我们遇到的许多数学建模问题涉及到曲面面积和体积的计算,所以在这个几何的部分里复习一下重要的概念和结果. 我们能计算的最基本的体积是一个三维的盒子.

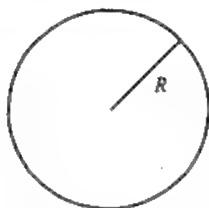


其长为 L,高 H,和深 D,而其体积为 $L\cdot H\cdot D$. 这个公式由用 $L\cdot H\cdot D$ 个单位立方体装满此盒来证明.

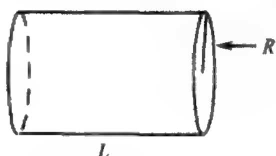


在解决各种最优化问题的过程中我们将需要种种曲面面积和体积公式的知识. 一旦我们钻研过积分理论之后就会得到对下列结果的验证.

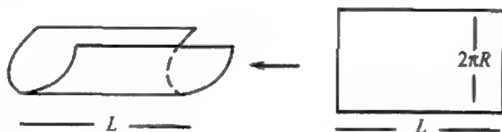
1. **圆的周长及面积**:半径 R 的圆的面积为 πR^2,其周长为 $2\pi R$.



2. **圆柱的体积**:一个长 L,半径 R 的圆柱的体积是 $\pi R^2 \cdot L$.

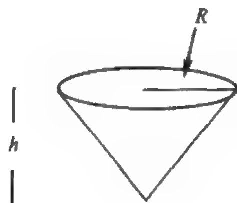


3. **一个开口圆柱的表面积**:上面那个(开口的)圆柱的表面面积为 $2\pi R \cdot L$. 这可由展开圆柱看出.

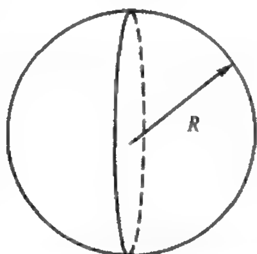


4. **闭圆柱的表面面积**:一个闭圆柱的表面面积是 $2\pi R \cdot L + 2\pi R^2$. 我们必须加上上底和下底圆的面积.

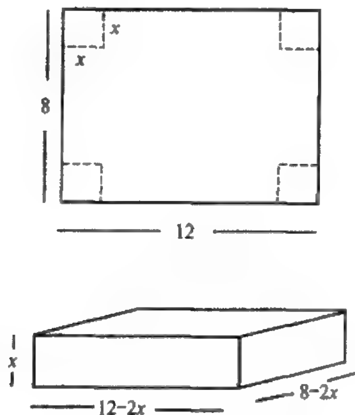
5. **圆锥的体积**:高为 h,底为半径 R 的圆锥的体积是 $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.



6. 球的表面积和体积：半径 R 的球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3$，而其表面面积为 $4\pi R^2$.



例 10.6（折盒子）　一个纸板制造公司生产宽 8 英尺长 12 英尺的矩形纸板. 从每个角上挖去有相同面积 x^2 的正方形，然后把剩下的纸板折叠（并粘合）成一个没有顶盖的盒子.



切掉的正方形要多大才能使盒子的体积最大?

盒子的体积由公式

$$V(x) = x(12-2x)(8-2x) = 4(24x - 10x^2 + x^3)$$

给出. 为了在区间 $0 \leqslant x \leqslant 4$（这些端点是由于我们不要盒子的边长有负长度而自然产生的）使 $V(x)$ 最大，我们运用三步算法.

第 1 步　$V'(x) = 4(24 - 20x + 3x^2) = 0$ 表示

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \times 3 \times 24}}{6} = \frac{20 \pm \sqrt{112}}{6},$$

因而 $x = \frac{20 - \sqrt{112}}{6}$,这是因为 $x = \frac{20 + \sqrt{112}}{6} > 4$ 超出了考虑的范围.

第 2 步　$V(0) = V(4) = 0$. 且 $V\left(\frac{20 - \sqrt{112}}{6}\right) = 67.6$

第 3 步　结论是,在 $x = \frac{20 - \sqrt{112}}{6}$ 时体积最大.

例 10.7(电筒生产)　一家公司生产圆柱形电筒. 在图中标有 B 的一端是由玻璃做成的. 表面的其余部分(包括标上 A 的另外的对面一端)由黄色塑料制作. 假定对每支电筒可用的黄色塑料为 12π 平方英寸. 要使电筒体积最大以便在里面能使用一排不同的电池,电筒的尺寸应该多少?



设 r 表示圆形端面的半径,h 为电筒的长. 由假定,电筒圆柱部分的面积与底面积之和必为 12π,即

$$12\pi = \pi r^2 + 2\pi rh, \tag{10.1}$$

因而 $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{12}$. 这时我们想使其极大的那个体积为 $\pi r^2 \cdot h$. 为了解决这个问题,我们必须把这个体积变换成单个变量的方程. 这可由首先从(10.1)中解出 h 来完成,这样有

$$h = \frac{12\pi - \pi r^2}{2\pi r} = \frac{6}{r} - \frac{r}{2},$$

然后把这个表达式代入体积公式中得到

$$V(r) = 6\pi r - \frac{\pi}{2}r^3.$$

第 1 步　$V'(r) = 6\pi - \frac{3\pi}{2}r^2 = 0$ 表示 $r = 2$.

第 2 步　$V(0) = 0, V(\sqrt{12}) = 0$ 及 $V(2) = 8\pi$.

第 3 步　当 $r = 2$ 及 $h = 2$ 的体积最大.

§10.3 的习题

(1) 一个纸板盒被设计成有一个正方形底面且无盖的. 如果 32 平方英寸的纸板可用于做此盒,应如何设计使其体积最大?

(2) 一个圆柱形罐头可设计有一个指定的体积 V. 求使罐头盒所需金属量最少的罐头尺寸.

(3) 一个珠宝商想把一块半径 r 的球形玉石珠雕琢成一块圆柱形. 此圆柱的最大可能的表面

面积能有多少?

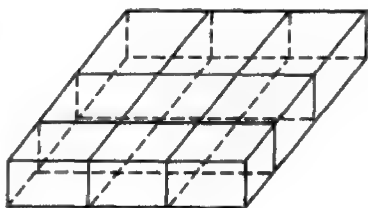
(4) 一位业余电影人要把一部电影展示给一大群朋友. 她想用大的圆锥形容器装了玉米花来招待大家;并且(为了经济起见)计划由一个圆形纸片来制作此圆锥:纸片的半径为 R,从其中挖去一个扇形,然后用胶带联结边缘.

此圆锥的最大可能的体积是多少?



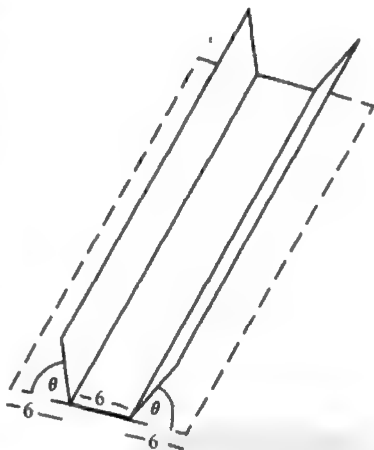
(5) 一个园艺供应公司打算生产一种塑料的苗床,它具有一个敞口的矩形形状,并被分成了 9 个相等的有正方形底部的分格.

由于公司已经生产了 50 立方英寸一小袋的表土,他们想要苗床具有 50 立方英寸的体积. 使做苗床必须使用的塑料总量最少,其尺寸应为多少?



(6) 一个核废料处理公司需要建一个竖井存放核废料. 此竖井应是封闭的圆筒形结构,其内容积为 120 立方英尺并有 4 英尺的厚度. 竖井要被做上涂层,其内涂层每平方英尺值\$ 20 而外涂层每平方英尺值\$ 35. 使竖井花费的涂层费最少的尺寸应该为多少?

(7) 一座房屋建在高水位的地点,房主想安装一台室外排水系统以防止地基漫灌. 把一张长的铝薄板做成一个水槽,此板 18 英寸宽;它被分成三个相等的长方形部分(每个6英寸宽),然后像右图所示的那样把外面的部分向上摺形成此槽. 每条边应该向上翻多大的角 θ 能使水槽的容积最大?



(8) 一个公司在设计一种废物回收桶. 桶的形状是一个圆柱,其顶部为一半球形. 要求回收桶的体积为64 立方英尺. 如果做半球顶的材料的花费是底部圆柱材料花费的三倍,那么使回收桶的生产成本最小的尺寸应是多少?



10.4　经济学中一个简单的数学模型

作为数学建模和最优化的最后一个例子，我们将考虑一个在市场研究中产生的为大家熟悉的生动问题. 假若一个公司将生产 x 件某种产品（例如计算机）并计划推向市场销售. 立刻产生的问题是，每件产品应以什么价格出售才能在给定的时间段中卖出所有的产品.

定义　*需求函数 $p(x)$ 是公司为在一给定时间段内卖完所有产品所要求的最高单价.*

求需求函数完全不是易事. 一种可能的办法是把此问题简化，假定函数 $p(x)$ 是线性的，即具形式 $p(x)=ax+b$，其中常数 a 和 b 可通过价格测试算出.

例 10.8（价格测试）　一家计算机公司推出一款新的 PC 机. 为了对每台 PC 确定合适的价格，公司做了一些价格测试. 在每台 PC 为\$1 500 的价位，发现在一周内有 10 000 台被卖出. 在下一周，价格降低到每台\$1 200，这期间有15 000台被卖出，假定需求函数是线性的，试求 $p(x)$.

当我们把数据 $p(10\,000)=\$1\,500$ 和 $p(15\,000)=\$1\,200$ 代入方程 $p(x)=ax+b$ 时，我们能容易地解出 a 和 b：

$$1\,500=10\,000a+b,1\,200=15\,000a+b,$$

这表明

$$a=\frac{-3}{50},b=2\,100.$$

因此需求函数是

$$p(x)=-\frac{3}{50}x+2\,100,$$

而且我们，譬如说，能够得到公司为了卖出 20 000 台 PC 应该收取的合适价格，即 $p(20\,000)=\$900$.

按单价 $p(x)$ 卖出 x 件产品所得到的总收入由 $x\cdot p(x)$ 给出. 通常的愿望是使总收入极大化（赋税在我们的分析中不是一个因素）.

例 10.9　参照例 10.8；为了使总收入极大化，公司应对每台 PC 要价多少？

要进行极大化的函数是

$$r(x)=x\cdot p(x)=x\cdot\left(\frac{-3x}{50}+2\,100\right),$$

它服从于界限 $0\leqslant x\leqslant 35\,000$（因为我们一定不想要总收入为负值）.

第 1 步 $r'(x) = -\frac{6x}{50} + 2\,100 = 0$,因而 $x = 700 \times 25$.

第 2 步 $r(0) = r(35\,000) = 0, r(700 \times 25) = 700 \times 25 \times 1\,050$.

第 3 步 当 $x = 17\,500$ 时总收入极大,而且此时每台 PC 的价格为 $p(17\,500) = \$1\,050$.

尽管总收入的最大化确实是理想的,但利润却常常是最重要的议题. 设 $c(x)$ 代表生产全部 x 件产品的**总成本**. 由以单价 $p(x)$ 卖出所有 x 件产品得到的**利润** $P(x)$

由

$$P(x) = x \cdot p(x) - c(x)$$

给出.

例 10.10 设在例 10.8 中生产一台 PC 机的成本为\$ 300. 每台 PC 的价格应该多少才能使利润极大?

这时的成本函数为 $300x$,因而利润函数为

$$\begin{aligned} P(x) &= x \cdot \left(\frac{-3x}{50} + 2100\right) - 300x \\ &= 1800x - \frac{3x^2}{50}. \end{aligned}$$

取导数得 $P'(x) = -\frac{6x}{50} + 1800$,它在 $x = 15\,000$ 时为 0. 最大利润由计算 P 在这点的值得到:

$$P(15000) = 15000\left(1800 - \frac{3 \times 15000}{50}\right) = \$\,13\,500\,000.$$

§10.4 的习题

(1) 一个计算机芯片制造商生产 10 兆字节的存储卡. 当此卡以\$ 350 一片出售时只有 6000 芯片售出. 当价格降低到\$ 300 时,在下一月中公司设法售出了 8000 芯片.

(a) 假定需求函数 $p(x)$ 是线性的,求 $p(x)$.

(b) 如果生产一片存储卡的成本为\$ 50,公司应要价多少才能使利润最大?

(2) 一个汽车公司引进了一款新车型. 当他们以标价\$ 25 000 首次推出此车时,他们发现一周内售出了 1 000 辆. 当价格提升到\$ 28 000 时只有 800 辆被售出.

(a) 假定需求函数 $p(x)$ 为线性的,求 $p(x)$.

(b) 如果生产一辆新车的成本实际为\$ 12 000,公司应要价多少才能使利润最大?

(3) 一间大学的冰激淋店估计他们每日的需求函数为

$$p(x) = 5 - \frac{x}{10},$$

其中 x 用加仑度量而 $p(x)$ 以美元计算. 商店固定的成本(租金,日常开销,薪金等等) 为每天\$ 110,并且以每加仑\$ 1.00 的价格买进冰激淋,故而每日的成本函数为$110 + x$.

(a) 为使利润极大,商店应对每加仑冰激淋开价多少?在这个价格下每日卖出多少加仑?日利润多少?

(b) 如果房主提高租金每日\$ 5,那么(a) 的答案如何变化?

(4) 一家美味松饼店已经建立了每日的需求函数

$$p(x) = -\frac{19}{6000}x + \frac{43}{20}.$$

商店有固定的每日成本\$ 50(包括租金,日常开稍,薪金,等等). 假定生产一个松饼商店要花费 25 美分. 要使利润最大化商店应开价多少?每日的利润多少?

(5) 一家初创公司接受了一笔政府贷款\$ 100 000 用来开发和上市一种新的软件产品. 市场调查指出,此软件按月的需求函数应为$p(x) = 80 - \frac{x}{25}$,其中$1000 \leqslant x \leqslant 3000$. 公司固定的每月成本为\$ 10 000(租金、薪金等),而生产每件产品的成本为\$ 5.

(a) 为使软件取得最大利润公司应开价多少?

(b) 如果使用(a) 中导出的价格,要多少时间公司才能归还政府贷给的原款数?

(6) 一家公司生产手机. 市场调查表明手机的需求函数为$p(x) = \frac{-x}{20} + 200$. 另外,生产 x 部手机的成本为 $2000\sqrt{x}$.

(a) 解释为什么生产一部手机的平均成本在生产的手机数增大时减少.

(b) 证明当生产的手机数 x 满足方程

$$\frac{-x}{10} + 200 - 1000x^{-\frac{1}{2}} = 0$$

的利润达到最大.

(c) 用你的 CAS 求上面(b) 中方程的(解 x 的) 最靠近的整数解.

第十章的附加习题

利用 §10.1 的三步算法求$f(x)$ 在所列区间上的极大值和极小值. (在存在的情况下). 用你的 CAS 作函数图以验证你的计算.

(1)$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 10$ 中.

(2)$f(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos x}$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 中.

(3) $f(x) = 2\sec(x) - \tan(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ 中.

(4) $f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & \text{如果 } x < 1 \\ x^2 - 5x + 6, & \text{如果 } x \geqslant 1 \end{cases}$ 在 $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$ 中.

(5) $f(x) = \begin{cases} -x - 2, & \text{如果 } x \leqslant -2 \\ -x^2 + 4, & \text{如果 } -2 < x < 2 \\ x - 2, & \text{如果 } x \geqslant 2 \end{cases}$ 在 $-4 \leqslant x \leqslant 4$ 中.

(6) 考虑习题(4)和(5),你会对三步算法作出什么修改?

(7) 在闭区间 $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$ 中求出一个数,使得此数和它的倒数的和满足:

(a) 尽可能的小; (b) 尽可能的大.

(8) 一个三角形内接于一个半圆形,使其一边与直经上.求具最大面积的三角形的尺寸.

(9) 证明可内接于一个直立圆锥中的直立圆柱的最大体积是圆锥体积的 $\frac{4}{9}$.

(10) 一个教堂想要安装一扇诺曼式的窗户(顶上为半圆的长方形).窗户的周长为 p.如果窗户的面积最大,求半圆的半经多少?

(11) 一个正方形的薄纸板,边长为 L,被用来制作一只开口的盒子;方法是挖去四个角的相同大小的正方形,然后将边折起来.要使盒子有最大可能的体积,这些正方形的尺寸应如何?

(12) 一个农民估计他现在就挖出土豆可得120蒲式耳,每蒲式耳他可卖出$1.75如果他预计他的收成每周增长8蒲式耳,但每周每蒲式耳的价格却要落下5分;那么在多少周内他卖完他的土豆可实现最大收获?

(13) 如果 $c(x)$ 为成本函数,则边际成本函数为 $C'(x)$.为什么 $C'(x)$ 被称为边际成本?许多成本函数的图像会有助于回答此问题.

(14) 设某一公司具成本函数 $C(x) = 6000 + 42x - 0.004x^2$.求生产300件时的边际成本.

(15) 单位平均成本由 $\frac{C(x)}{x}$ 给出.用你的CAS作习题(14)中的成本函数与平均成本函数的图像.何处成本最小?

(16) 一条口径可以忽略不计的管子被水平地运输到一个直角的拐角,拐角路的这一边为8英尺宽而另一边为4英尺宽.此管能通过的最大长度是多少?

(17) 求椭圆 $x^2 - 2xy + 4y^2 = 12$ 上的点,使这些点的横坐标 x 取得最大与最小值.用你的CAS作此椭圆的图来验证你的计算.

(18) 一个长方形梁的强度与其宽度和高度平方的乘积成正比.求从一个直径18英时的圆木段上能砍出的最强长方形梁的尺寸.

(19) 求内接于曲线

$$x^{2/3} + y^{2/5} = 8$$

的最大矩形的尺寸.

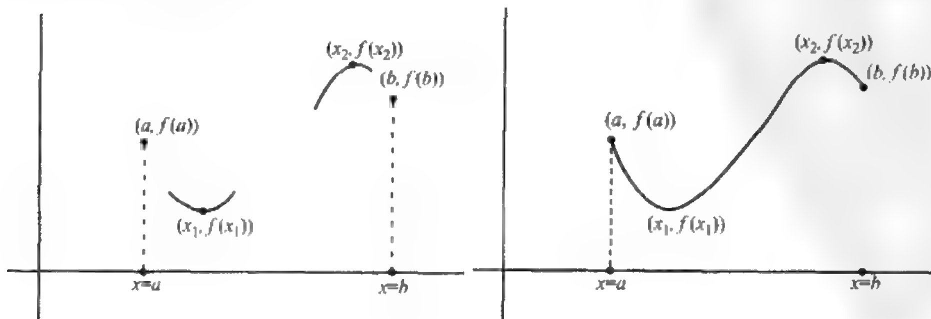
第十一章　函数作图

11.1　用一阶和二阶导数判别法作图

设 $y = f(x)$ 为在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的可微函数. 我们现在描述一个作 $y = f(x)$ 图像的极迅速的方法,对于一大类函数它能轻易地用手画去进行. 可将其表述为一个四步的算法.

第 1 步　画出两个端点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

第 2 步　找出所有实数 $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n < b$ 使得条件 $f'(x_i) = 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 成立. 称这些数为**判别值**. 曲线上相对应的点 $(x_i, f(x_i))$ 叫做**判别点**. 画出判别点:



$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \cdots, (x_n, f(x_n)).$$

第 3 步 用一阶导数或二阶导数判别法对每个判别值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分类. 在每个 $(x_i, f(x_i))(i = 1,2,\cdots,n)$ 画出一个局部极大,极小或拐点的图(见上左图).

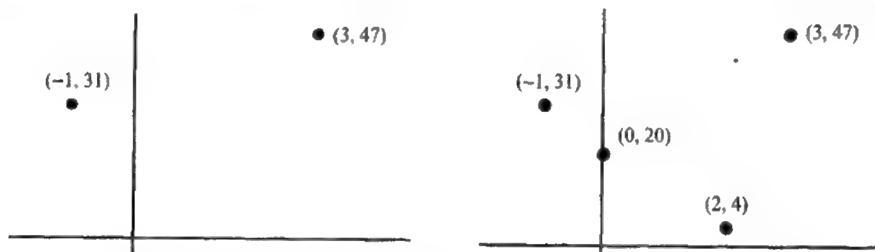
第 4 步 最后,联结这些分散的图便完成了作图(见上右图).

例 11.1 设 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 20$,区间为 $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

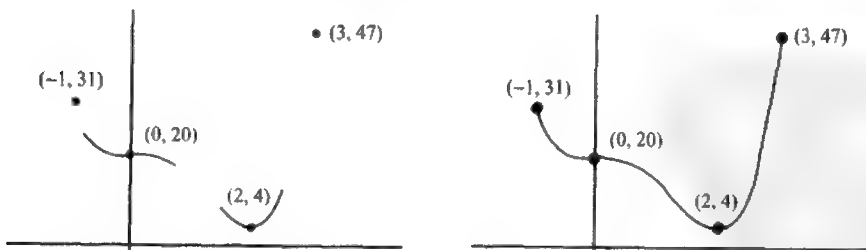
第 1 步 $f(-1) = 31$, $f(3) = 47$. 首先画出这两个端点 $(-1,31)$ 和 $(3,47)$.

第 2 步 $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x-2)$. 在令 $f'(x) = 0$ 时得到 $f'(0) = f'(2) = 0$. 判别值位于 $x = 0$ 和 $x = 2$. 画出判别点 $(0,20)$ 和 $(2,4)$.

第 3 步 当 $x < 0$ 时 $f'(x) = 12x^2(x-2) < 0$,而当 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 也是如此. 因此点 $(0,20)$ 是个 $f(x)$ 在此区间增大时的拐点. 另一方面, $f''(2) = 48 > 0$ 告诉我们, $(2,4)$ 是个局部极小.



第 4 步 联结分散的图以完成作图.



§11.1 的习题

用 §11.1 的四步算法画出下列函数在所指出的区间上的每个图像. 用你的 CAS 快速计算在

各个判别点的一阶和二阶导数. 在描绘图像后,与你用 CAS 画的图进行比较.

(1) $y = x^2 - 4x - 21, (-10 \leqslant x \leqslant 10)$.　　(2) $y = 11 - x^5, (-2 \leqslant x \leqslant 2)$.

(3) $y = \ln(x) - x^3, \left(\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 2\right)$.　　(4) $y = \cos(x^2), \left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 10\right)$.

(5) $y = xe^x, (-2 \leqslant x \leqslant 2)$.　　(6) $y = e^{x^2}, (-2 \leqslant x \leqslant 2)$.

(7) $y = x^7 - 3x^6 + 2x^5, (-1 \leqslant x \leqslant 2)$.　　(8) $y = \sin(x) + \cos(x), (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

(9) $y = 3x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 48x - 200, (-3 \leqslant x \leqslant 3)$.

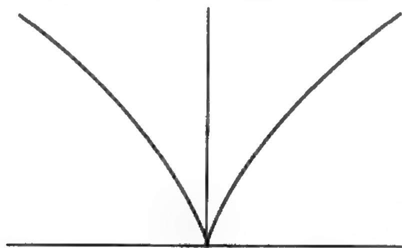
(10) $y = x + \frac{1}{x}, \left(-2 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}\right)$.

(11) $y = 3x^8 - 52x^6 + 216x^4 - 500, (-4 \leqslant x \leqslant 4)$.

(12) $y = x^x, \left(\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1\right)$.

11.2　有尖点的作图

如果我们作一个譬如像 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 这种函数的图像时,在 $x = 0$ 出现了一个尖点.



定义　如果一个函数在一点 $x = c$ 的一个邻域中除去点 $x = c$ 自身外为可微,而

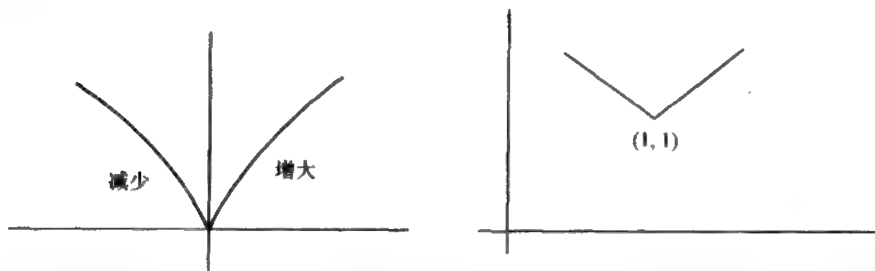
$$\lim_{x \to c} f'(x) = \pm \infty,$$

并且 $f'(x)$ 在 x 通过 c 时改变符号,则我们称点 $x = c$ 是个**尖点**.

注　由于当我们趋向 $x = c$ 时导数变为无穷,故而我们推断出切线在我们趋向尖点时它变为竖直的.

例如,在 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 的情形我们有 $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$,因此 $f'(0) = \infty$. 因为 $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$ 而 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$,我们推出 f 在 $x < 0$ 为减少而在 $x > 0$

为增大.



如果在区间$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$我们作函数$y = |x-1|+1$的图像,我们发现在$x=1$有一个拐角. 在点$x=1$此曲线没有导数;事实上有两条可能的切线,它们引出了拐角.

为了画出所有的尖点和拐角,§11.1的四步法中加上一个附加的第3′步是必要的.

第3′步 找出所有点$x = c_1, c_2, \cdots, c_m$,使得$f'(x)$为无穷或不存在. 画出点$(c_i, f(c_i))$, $(i=1,2,\cdots,m)$. 在每个c_i,确定在其两边$f(x)$是增大还是减少. 画出尖点和拐角.

在上面例子中尖点的出现使我们有了扩大判别值定义的动机.

定义 *函数$f(x)$的***判别点***是一个实数x,在那里或$f'(x)=0$, $f'(x)=\pm\infty$,或者$f'(x)$不存在.*

§11.2 的习题

用§11.2的四步法在指明的区间上作下列函数的图像. 像前面一样,用你的CAS计算各种函数在它们的判别值的一阶和二阶导数. 确信包含了所有的尖点和拐角. 比较你画的图与CAS作的图.

(1)$y = x^{\frac{4}{5}}$, $(-10 \leqslant x \leqslant 10)$.

(2)$y = \sqrt{4-x^2}$, $(-2 \leqslant x \leqslant 2)$.

(3)$y = x^2 - |2-x|$, $(-1 \leqslant x \leqslant 4)$.

(4)$y = (x-5)^{\frac{2}{7}} + 3$, $(0 \leqslant x \leqslant 10)$.

(5)$y = x^{\frac{2}{7}}(1-x)$, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

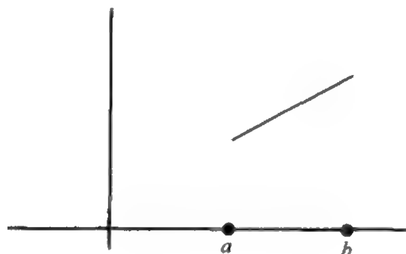
(6)$y = x^{\frac{2}{7}}(1-x) + |2-x|$, $(-1 \leqslant x \leqslant 3)$.

(7)$y = |\cos(x)|$, $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

(8)$y = x^x + \left|x - \frac{1}{2}\right|$, $\left(\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1\right)$.

11.3　凹性

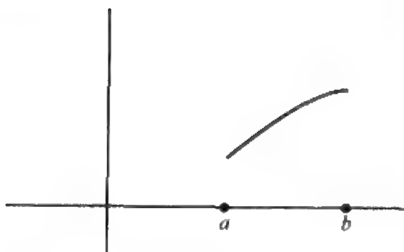
考虑一个在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的增函数. 对此有三种可能的局面:函数可以以常率增加.



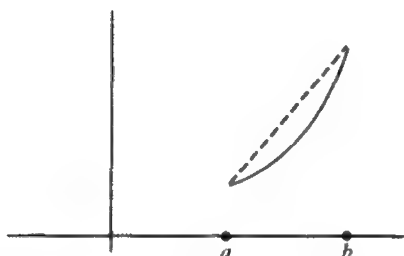
可以以凹向上的方式增加,



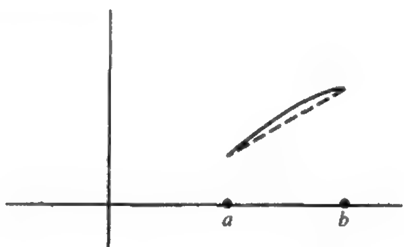
或者从凹向下的方式增加.



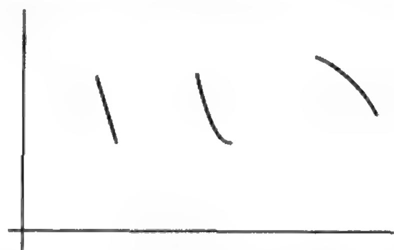
注意,在凹向上的情况,曲线在虚线(其具常斜率,且为正)的下方,



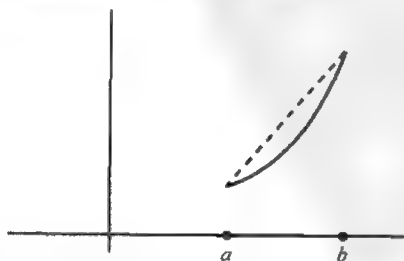
而在凹向下的情况它在虚线的上方.



减函数的情形是完全类似的,像此前那样有三种情况.



有时有必要准确地知道一个函数是如何增加或减少的,即详细说明凹性.这里我们利用二阶导数得到一个简单的准则.



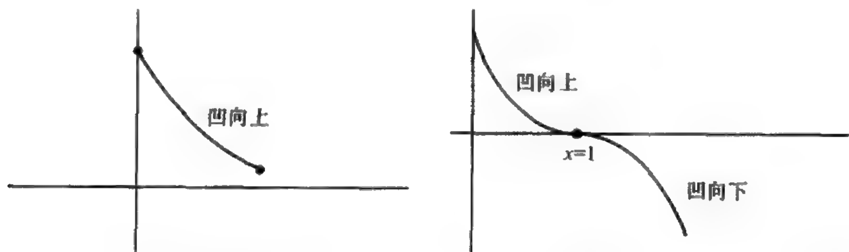
考虑一个凹向上的增函数. 虚线(其斜率为正常数)是个形如$ax+b$的函数,其二阶导数为0. 凹向上曲线的切线的斜率必是增加的,即$f'(x)$当x从a到b运动时$f'(x)$必定增加. 但此蕴含了$f''(x)>0$(这里将

一阶判别法应用于函数 $F(x) = f'(x)$；已知它为增加的). 这个推理让我们给出一个数学上精确的凹性定义.

定义　如果一个函数在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上是二次可微函数，并且对所有 $a \leqslant x \leqslant b$ 有 $f''(x) \geqslant 0$，于是我们说 f 在此区间上是**凹向上**的.

定义　如果一个函数在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上是二次可微函数，且对所有 $a \leqslant x \leqslant b$ 有 $f''(x) \leqslant 0$，于是我们说 f 在此区间是**凹向下**的.

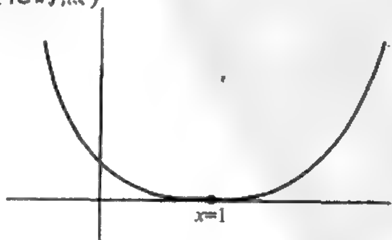
例 11.2　考虑在区域 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 中的函数 $f(x) = (1-x)^3$（下左图）. 由于 $f''(x) = 6(1-x)$. 我们看出对所有 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 有 $f''(x) > 0$，因而在此区域 f 必是凹向上的.



例 11.3　再次考虑函数 $f(x) = (1-x)^3$，但区间为 $0 \leqslant x \leqslant 2$（上右图）. 因为 $f''(x) = 6(1-x)$，故对 $0 \leqslant x < 1$ 有 $f''(x) > 0$，而 $f''(1) = 0$，并且对 $1 < x \leqslant 2$ 有 $f''(x) < 0$. 因此在拐点 $x = 1$ 处凹性有变化. 这给出了下面定义的动机.

定义　如果对 $a \leqslant x < c$，$f''(x) > 0$，$f''(c) = 0$ 及对 $c < x \leqslant b$，$f''(x) < 0$，则我们称 $x = c$ 是一个**拐点**（或凹性变化的点）.

定义　如果对 $a \leqslant x < c$，$f''(x) < 0$，$f''(c) = 0$ 及对 $c < x \leqslant b$，$f''(x) > 0$，则我们称 $x = c$ 是一个**拐点**（或是凹性变化的点）



警示　只是由 $f''(c) = 0$ 并不能保证 $x = c$ 是个拐点. 譬如考虑 $f(x) = (1-x)^4$. 这里 $f''(x) = 12(1-x)^2$，因此 $f''(1) = 0$. 但 $x = 1$ 不是一个拐点：对所有 $x \neq 1$，$f''(x)$ 都是正的，从而 $f(x) = (1-x)^4$ 总是凹向上的.

§11.3 的习题

对下列在指定区间上的函数的图像确定其凹性结构及所有的拐点. 用你的 CAS 快速计算导数并用 CAS 作图检查你的答案.

(1) $y = (x-2)^5, (0 \leqslant x \leqslant 4)$.

(2) $y = 4x^3 - 3x^2 - 6x - 10, (0 \leqslant x \leqslant 2)$.

(3) $y = x^2 - 7x + 2, (-\infty \leqslant x \leqslant \infty)$.

(4) $y = \ln(x), \left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 10\right)$.

(5) $y = (2-x)^6, (0 \leqslant x \leqslant 4)$.

(6) $y = \sin(x), (-\infty \leqslant x \leqslant \infty)$.

(7) $y = e^x, (-\infty \leqslant x \leqslant \infty)$.

(8) $y = \sin(x) + \cos(x), (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

(9) $y = x^{\frac{2}{3}}, (-2 \leqslant x \leqslant 2)$.

(10) $y = \sqrt{4-x^2}, (-2 \leqslant x \leqslant 2)$.

(11) $y = -\sqrt{4-x^2}, (-2 \leqslant x \leqslant 2)$.

(12) $y = e^{x^2}, (-2 \leqslant x \leqslant 2)$.

(13) $y = 2x + \frac{18}{x}, (-10 \leqslant x \leqslant 10)$.

(14) $y = x^2 + |3-x|, (0 \leqslant x \leqslant 4)$.

(15) 证明一般的三次方程 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$(其中假设 $a \neq 0$) 正好有一个拐点.

(16) 证明最一般的二次方程 $y = ax^2 + bx + c$(假定 $a \neq 0$) 没有拐点且正好有一个判别点. 对这种情形你能描述其凹性吗?

第十一章的附加习题

(1) 证明一个 n 次多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, (a_n \neq 0)$ 最多只有 $(n-2)$ 个拐点.
提示:观察 §11.3 习题中的习题(15).

(2) 对一般三次方程 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 求 a,b,c,d 满足的条件,使得 f 在 $-\infty < x < 0$ 总是增加或总是减少.

(3) 求 $f(x) = x\tan(x)$ 在 $-\pi/2 < x < \pi/2$ 的所有的判别点并将其分出拐点或不可微分的点. 在你的 CAS 上用作图检验.

(4) 对 $f(x) = \sin(x^2), 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 确定凹性,拐点及极大和极小点. 在你的 CAS 上作图以检验你的答案.

(5) 用你的 CAS 作 $f(x) = x^{1/3}(x+4)^{4/3}$ 的图像并从图上确定出判别点. 取导数以验证它们.

(6) 设

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{如果 } x \leqslant 1, \\ -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

求在区间 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 上的所有判别点. 确定它们的性质并在你的 CAS 上用图像检验.

(7) 设

$$f'(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{如果 } x \leqslant 1, \\ -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

(a) f 的判别值是什么?

(b) f 在哪些地方增加,哪些地方减少?

(c) 在哪里 f 凹向上,哪里凹向下?

(d) 求出 f 的一个可能的表达式并用你的 CAS 检验.

(8) 用你的 CAS 作 $f(x) = \dfrac{3x^2-4}{\exp(x)}$ 并找出所有的极大,极小.

(9) 假定 x_0 同时是 f 和 g 的极小点. 它是 $f+g, f-g, f\cdot g, f/g$(假定 $g \neq 0$) 的判别点吗?如果是,是什么类型的?请解释每种情况.

(10) 根据下面的信息作函数的一个粗略的草图.

(a) $\lim\limits_{x\to u^-} f'(x) = +\infty$, 在 $x < u, f''(x) > 0$;

$\lim\limits_{x\to u^+} f'(x) = 0$, 在 $x > u, f''(x) < 0$.

(b) $\lim\limits_{x\to u^-} f'(x) = +\infty$, 在 $x < u, f''(x) > 0$;

$\lim\limits_{x\to u^+} f'(x) = -\infty$, 在 $x > u, f''(x) > 0$.

(11) 作一条光滑曲线 $y = f(x)$,使得满足下面的条件:

$$f(1) = 0, \text{而且对 } x < 1, f'(x) > 0; \text{对 } x > 1, f'(x) < 0.$$

(12) 作一条光滑曲线 $y = f(x)$ 使得满足下面的条件:

$$f(1) = 2, \text{而且对 } x < 1, f''(x) > 0; \text{对 } x > 1, f''(x) < 0.$$

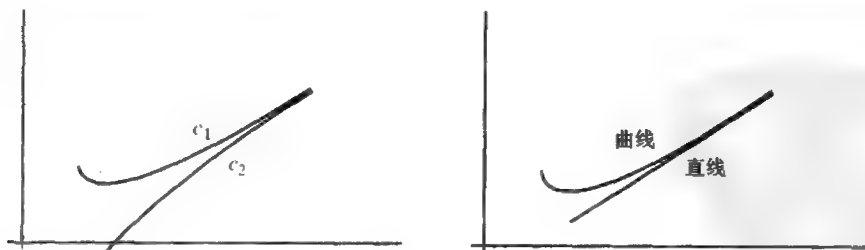
(13) 确定使曲线 $y = x^3 + bx^2 + x + 4$ 在 $x = 3$ 有一个拐点时的 b 值.

(14) 确定使曲线 $y = ax^3 + bx^2 + x + 4$ 在 $(2,2)$ 有一个拐点时的 a 和 b.

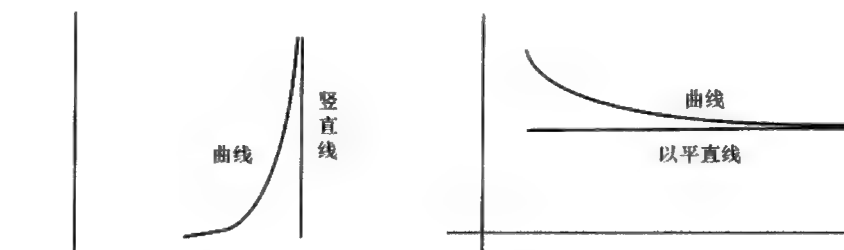
第十二章　渐近线

12.1　渐近线的一般情形

称两条曲线在区间$a \leqslant x \leqslant b$上是**渐近的**是说，如果它们互相可以任意接近但却在此区间上永不相交. 例如如果我们假定下面的曲线处处连续并且相互越来越靠近(但不相接触)，于是它们是渐近的(下左图). 令人特别感兴趣的情形是一条曲线渐近于一条直线(下右图).



如果直线恰好是竖直的，我们称它为一条**竖直渐近线**，而如果此线是水平的，它则被叫做**水平渐近线**.



注　如果这条直线(水平或竖直的)是渐近线,则被称做某曲线的一条渐近线.

12.2　竖直渐近线

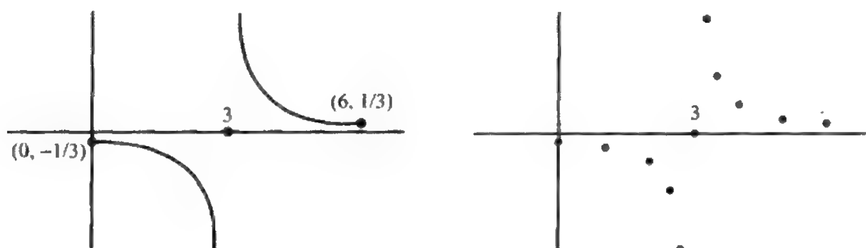
在第十一章中我们的注意力聚集在各种绘图技术上,这些技术对于有明确定义且在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上可微的函数适用. 然而实际上函数并不是表现得如此良好. 譬如,如果我们画出在 1920 年代的股市平均值,便看到了臭名昭著的崩盘.

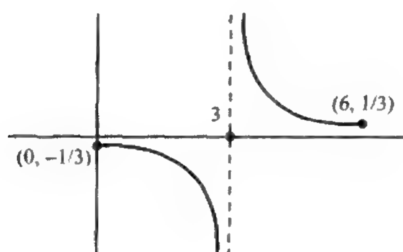


现在扩大我们的函数类,考虑包括在某个点**爆炸**(在正或负的方向变为无穷)的函数. 有这种性质的基本例子是函数.

$$f(x) = \frac{1}{x-3},$$

它在 $x \to 3$ 时爆炸:$f(x)$ 在区域 $0 \leqslant x \leqslant 6$ 的图像描绘在下面. 这可由画出点 $f(0) = -1/3, f(1) = -1/2, f(2.5) = -2, f(2.95) = -20$,还有点 $f(6) = 1/3, f(5) = 1/2, f(4) = 1, f(3.5) = 2, f(3.05) = 20$ 等等看出. 在点 $x = 3$ 画一条竖直的虚线对形象的观察是很有帮助的. 事实上这条虚线就是我们曲线





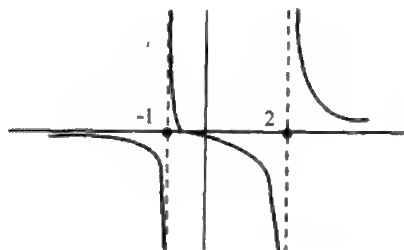
$$y = \frac{1}{x-3}$$

的一条竖直渐近线.

其次,我们考虑一个多少更为复杂点的函数,

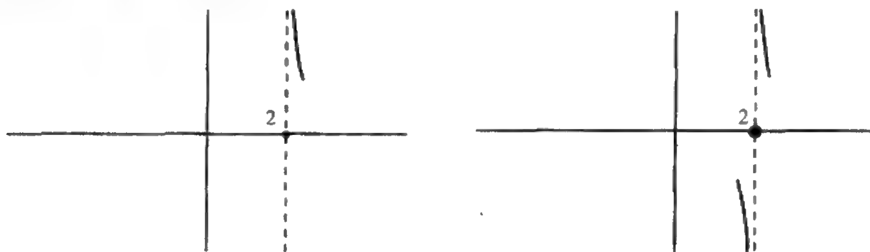
$$f(x) = \frac{2x+1}{(x-2)(x+1)},$$

它的图像包括了在 $x = 2, -1$ 的竖直渐近线.



我们首先看到,$f(x)$ 在 $x = 2, -1$(而无其他之处)爆炸. 这意味着竖直渐近线在那里. 现在对 $x > 2$, $f(x) > 0$,因而对 $x > 2$ 且靠近 2 处,图像局部看起来必定像是下面左图的情形. 另外,对 $x < 2$ 且靠近 2 处,$f(x) < 0$,从而得到此

图的另一片段(下右图).



对 $x=-1$ 邻域中的相似分析产生了下左图,现在可以用 §11.1 的方法画完此图(下右图).



我们对此过程作一个概括.

竖直渐近线的判别和描图方法:

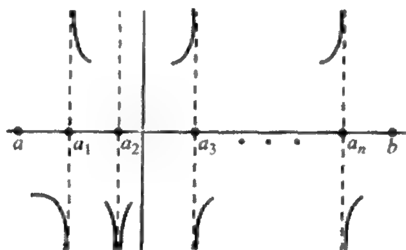
第 1 步　给定了在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 的函数,求出所有使 $f(x)$ 爆炸的点 $a \leqslant a_1, a_2, \cdots, a_n \leqslant b$.

第 2 步　在点 $x=a_1, a_2, \cdots, a_n$ 作竖直的虚线.

第 3 步　在每个 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 确定对 $x>a_i$ 和 $x<a_i$(但 x 靠近 a_i)$f(x)$ 是正还是负. 在曲线的相应片段处描图.

用 §11.1 第 4 步的方法画完此图(下页图).

注　在描出曲线的各种可能的爆炸(称之为**奇点**)之后我们描画 $f(x)$ 在那里是有确切定义和可微的图形(因而用 §11.1 的方法). 要得到奇点 $x=a_1, a_2, \cdots, a_n$ 可试着将 $f(x)$ 表示为二个函数的比,而 $f(x)=p(x)/q(x)$. 一般情形下,使 $q(x)$ 为 0 的点给出了 $x=a_1, a_2, \cdots, a_n$.



§12.2 的习题

对下列每个函数$f(x)$,确定每个使$f(a) = \pm\infty$ 的实数a. 以CAS计算$f(a)$来检查你的答案. 你应该会有一处错误信息. 用你的CAS画这些函数的图,看看是否竖直渐近线出现在$x = a$.

(1)$f(x) = \frac{3x-1}{x^2-3x-4}$.

(2)$f(x) = \frac{4x^3+11}{2x^2-3x-1}$.

(3)$f(x) = \frac{\cos(x)}{(x-11)}$.

(4)$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

(5)$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2+2x}$.

(6)$f(x) = \frac{x-1}{x^3-x}$.

(7)$f(x) = \frac{x^2+2}{\ln(x)}, (0 < x < \infty)$.

(8)$f(x) = \frac{2x+1}{\cos(x)}$.

(9)$f(x) = \frac{x-1}{x^3-1}$.

用竖直渐近线判别和描图法在指出的区间上画出下列函数. 用虚线画每条竖直渐近线. 使用你的CAS计算必要的函数值及其导数. 用CAS画出函数以检验你的工作.

(10)$f(x) = \frac{x^2-3}{x-1}, (-10 \leqslant x \leqslant 10)$.

(11)$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-3x-4}, (-5 \leqslant x \leqslant 5)$.

(12)$f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}, (-4 \leqslant x \leqslant 4)$.

(13)$f(x) = \frac{4}{2x^2-3x-1}, (-2 \leqslant x \leqslant 2)$.

(14)$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-3x^2}, (-4 \leqslant x \leqslant 4)$.

(15)$f(x) = \frac{2x+3\sin(x)}{x-2}, (-1 \leqslant x \leqslant 4)$.

(16)$f(x) = \tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi\right)$.

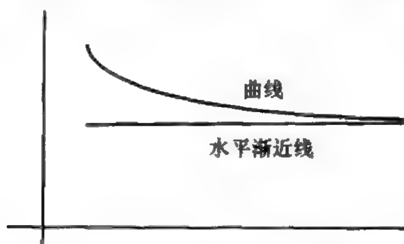
(17)$f(x) = e^{\frac{1}{x}}, (-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

(18)$f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}, \left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\right)$.

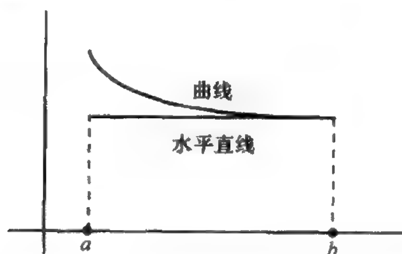
(19)$f(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

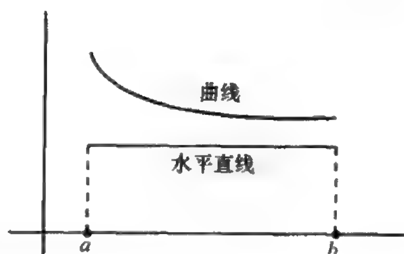
12.3 水平渐近线

在 §12.1 我们介绍了描画在下面的一条曲线的水平渐近线.

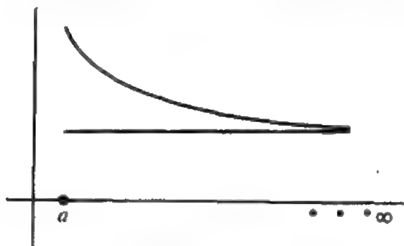


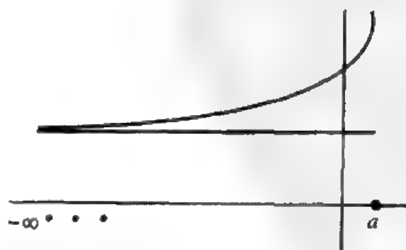
了解这种现象的关键之处是一条水平渐近线不能出现在有限区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 中. 一旦我们被局限于这样一个有限区间就只有两种可能性:要么水平直线和曲线相交,要么它们不交.





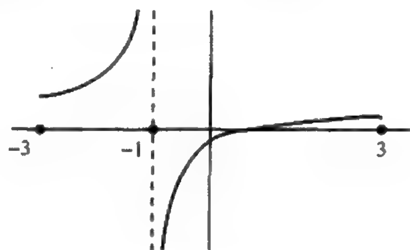
由于按定义,一条曲线和它的水平渐近线必须能走得任意靠近但永不相交,我们必须考虑 $a \leqslant x \leqslant \infty$ 类型的,或者是 $-\infty < x \leqslant a$ 类型的无穷区间.





例 12.1 考虑函数 $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. 如果在有限区间 $-3 \leqslant x \leqslant 3$ 上用

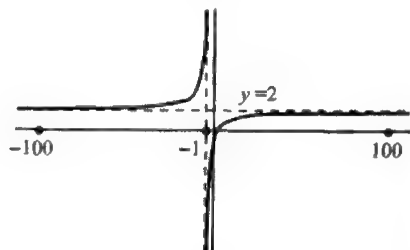
§12.2 和 §11.1 的技术作此图,我们得到了下图.



将此区间扩大到 $-10 \leqslant x \leqslant 10$,我们得到



而再次扩大到 $-100 \leqslant x \leqslant 100$ 我们可形象地看出在 $y = 2$ 的水平渐近线.



注意到在此例中,由于 $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$,我们有 $f(3) = \dfrac{5}{4} \approx 1.25$,以及 $f(10) = \dfrac{19}{11} \approx 1.73$, $f(100) = \dfrac{199}{101} \approx 1.97$, $f(1000) = \dfrac{1999}{1001} \approx 1.997$,等等. 明显 $f(x)$ 小于 2,当 $x \to \infty$ 时变得可任意接近 2. 我们正式地计算此极限于后:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} \cdot \overbrace{\frac{1/x}{1/x}}^{\text{小技巧:乘1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-1/x}{1+1/x} = \frac{2}{1} = 2,$$

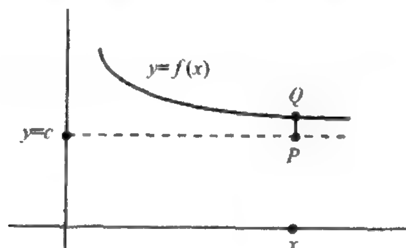
这是因为当 $x\to\infty$ 时 $\frac{1}{x}\to 0$.

这个例子给了我们下个命题的动机：

命题 12.2　设 $f(x)$ 为定义在无穷区间 $a\leqslant x\leqslant\infty$ 上的函数. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，且对 $a\leqslant x<\infty$，$f(x)\neq c$，则 $f(x)$ 在 $y=c$ 有一条水平渐近线.

命题 12.3　对定义在区间 $-\infty<x\leqslant a$ 的函数 $f(x)$ 如果有 $\lim\limits_{n\to-\infty}f(x)=c$，且对 $-\infty<x\leqslant a$，$f(x)\neq c$，则 $f(x)$ 在 $y=c$ 有一条水平渐近线.

证明　我们集中在第一个命题上，后一个是类似的. 由定义，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$ 等价于说 $|f(x)-c|$ 在变量 x 趋向无穷时变成任意的小.



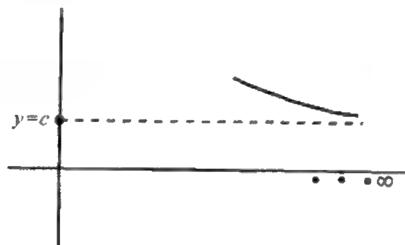
曲线与水平渐近线之间的距离（上图中的 PQ）事实上是 $|f(x)-c|$. 因为这个距离当 $x\to\infty$ 变得任意小，命题得证. $a\leqslant x<\infty$ 有 $f(x)\neq c$ 的条件确保了曲线 $y=f(x)$ 和直线 $y=c$ 在此区间永不相交.

水平渐近线判别和描图的方法：

第 1 步　给定定义在区间 $a\leqslant x<\infty$ 上的 $f(x)$，计算 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

第 2 步　如果此极限存在并等于 c 并假若曲线 $y=f(x)$ 对 $x>a$ 不与直线 $y=c$ 相交则直线 $y=c$ 是一条水平渐近线.

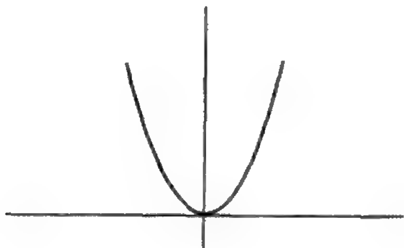
第 3 步　在 $y=c$ 画出一条水平虚直线，并确定对 $x\to c$ 是 $f(x)>c$ 还是 $f(x)<c$. 画出相应的曲线段，并用 §11.1 和 §12.2 的竖直渐近线判别和描图



方法完成图像.

注 同样的方法用于区间 $-\infty < x \leqslant a$. 如果我们想要考虑在整个实轴 $-\infty < x < \infty$ 的函数,有必要由计算两个极限$\lim_{x\to\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 来求出两个可能的渐近线. 如果没有一个极限存在则没有水平渐近线.

例 12.4 函数$f(x) = x^2$ 没有水平渐近线,这是因为 $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = \infty$.



例 12.5 求$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$的水平渐近线.

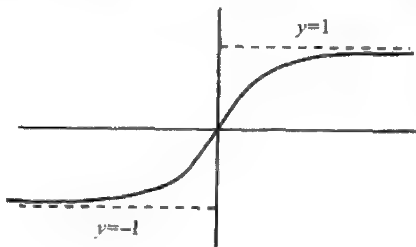
这时

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = +1,$$

而

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -1.$$

因此在 $y = 1$ 和 $y = -1$ 有水平渐近线. 用 CAS 作图,我们得到图像.



§12.3 的习题

对下列的每个函数 $f(x)$ 计算极限

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

如果其中至少有一个极限存在，$f(x)$ 的图像就有水平渐近线. 用你的 CAS 作出图像来检查你的结果.

(1) $f(x)=\dfrac{3x^2-2x+11}{x^2+1}$.　(2) $f(x)=\dfrac{-6x^2+x+9}{2x^2+3}$.

(3) $f(x)=\dfrac{x^3+2x+9}{2x^3-1}$.　(4) $f(x)=e^x$.

(5) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2)}{x-1}$.　(6) $f(x)=e^{-x^2}$.

(7) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.　(8) $f(x)=\dfrac{x^2\cos(x)}{3x^2-2x+3}$.

描画下列函数的图像. 包括所有竖直和水平的渐近线. 用你的 CAS 计算所需要的函数值及其导数. 比较你的作图与 CAS 的作图.

(9) $f(x)=\dfrac{2x}{x+4}$.　(10) $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$.　(11) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$.

(12) $f(x)=\dfrac{x}{2x-5}$.　(13) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.　(14) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$.

(15) $f(x)=\dfrac{2x^3}{\sqrt{3x^6+10}}$.　(16) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$.　(17) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2-1}$.

(18) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x-3}$.　(19) $f(x)=\dfrac{e^{-x^2}}{x^2-1}$.　(20) $f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$.

(21) 考虑函数 $y=\dfrac{\sin(x)}{x}$. 证明此曲线与直线 $y=0$ 交无穷多次，但 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}=0$. 用你的 CAS 画出此曲线. $y=0$ 是一条水平渐近线吗?

(22) 证明曲线 $y=\dfrac{2x^2+3x+1}{x}$ 渐近于直线 $y=2x+3$. 在适当区间上用你的 CAS 画出曲线并形象地检验你的答案.

(23) 证明曲线 $y=\dfrac{x^4+3x^2+x-1}{x^2}$ 渐近于曲线 $y=x^2+3$. 在适当区间上用你的 CAS 作图并形象地检验你的答案.

第十二章的附加习题

描绘下列函数的图像，包括所有竖直和水平的渐近线. 用你的 CAS 计算所需的函数值及导

数. 用 CAS 作出的图像比较你所画的.

(1) $y = \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 1}$. (2) $y = \tan(x)$. (对 $x > 0$ 求出所有渐近线).

(3) $y = \tanh(x)$. (4) $y = \ln(x^2) - 1$.

(5) $y = 2x^2 - x^{2/3}$. (6) $y = \frac{\cos^2(x)}{1 + \cos(x)}$.

(7) $y = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$. (8) $y = x^{2/3} - x^{2/5}$.

(9) $y = x^{2/3} - (1 - x)^{2/3}$. (10) $y = \frac{x^2 + 3}{x^3 - x + 9}$.

(11) 证明一条连续曲线 $y = f(x)$ 若有

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

或

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

则它渐近于直线 $y = mx + b$.

在习题(12) ~ (17) 中确定已知曲线渐近于一条直线. 求出所有这样的渐近线.

(12) $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$. (13) $y = 7x - 2 + \frac{4x}{x^2 - 1}$. (14) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

(15) $y = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x - 3}$. (16) $y = \frac{x^2}{3x + 2}$. (17) $y = x^3 - 2x + 1$.

(18) 求双曲线 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ 的所有渐近线.

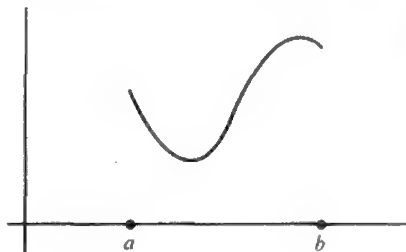
第十三章　作为面积的积分

13.1　作为面积的积分的直观定义

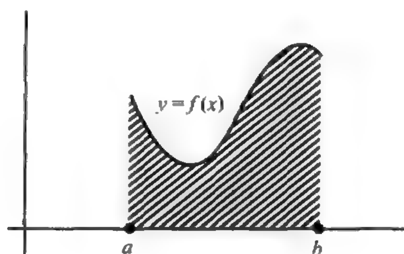
问题　什么是面积?

由于此概念似乎是直觉的,所以这是一个非常困难的问题.本章的目的是构造性地提供一种计算一个区域的面积的方法,而此区域的边界是弯曲的且不单单是个多边形(见 §13.3).在 §13.1 和 §13.2 中我们将以一种直观的方式去谈及面积,很像是古希腊人读及一个圆的面积的方式.

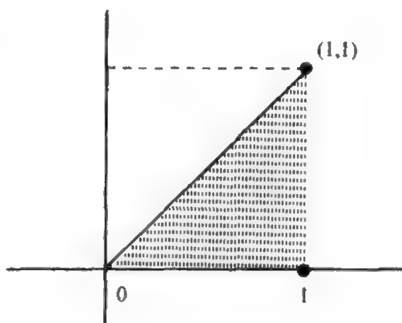
设 $f(x)$ 是定义在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的连续函数.假定对此区间的所有 x, $f(x) > 0$.于是 $y = f(x)$ 的图像位于 x 轴的上方,类似于下图.



定义(直观的)　在连续函数 $f(x)$ 的图像位于 x 轴上方的假定下，则 $f(x)$ 的从 a 到 b 的积分被定义为由曲线 $y = f(x)$，x 轴和竖直线 $x = a$ 和 $x = b$ 围成的区域的面积，用 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示.



注　用图表示，$\int_a^b f(x)\,dx$ 只不过是上面有阴影区域的面积.

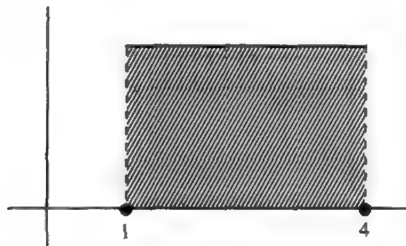


例 13.1　$\int_0^1 x\,dx$ 是什么？如果我们在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上作曲线 $y = 1$ 的图像，我们得到画在下面的线段. 由定义，此积分是有阴影的三角形的面积(它是 1×1 的正方形面积的 1/2). 结论是

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

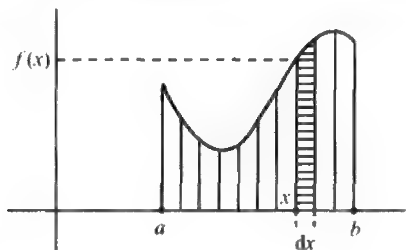
例 13.2　$\int_1^4 2\,dx$ 是什么？在区间 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 上 $y = 2$ 的图像是一条长度 3 的直线段. 有阴影的区域是个面积为 6 的长方形，即

$$\int_1^4 2\,dx = 6.$$

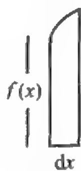


提问 记号$\int_a^b f(x)\,dx$的起因是什么？

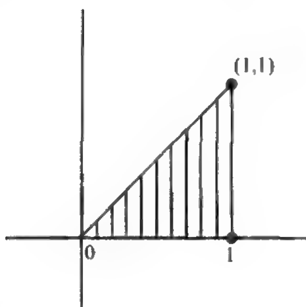
回答 称符号$\int$为**积分号**. 从历史上说，它是由用来代表和的符号S拉长了以后导出的. 积分按下面方式看起来是个和数（这使人想起近似圆面积的经典的希腊方法）. 在曲线$y = f(x)$下方的面积可以剖开为矩形形状的许多片.



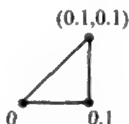
按传统，上面画出的小的宽度被表示为dx. 我们可以把dx想成是非常小的数，譬如0.0001. 上面带阴影的区域由于几乎是矩形，它有近似的面积$f(x)\cdot dx$. 积分$\int_a^b f(x)\,dx$因此可以被面积近似为$f(x)\,dx$的那些矩形片（从$x = a$到$x = b$）的和所近似. 注意，如果放大带阴影的部分，它事实上在顶部是弯曲和斜的. 但是在让$dx \to 0$时，这个区域看起来越来越像一个矩形，而这些区域的和将趋向此积分真正的值. 我们将在§13.3详细阐述这个方法.



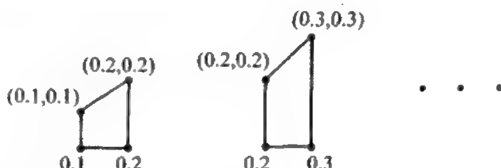
例 13.3 将三角形剖开为10个近似的矩形小片以近似$\int_0^1 x\,dx$的值.



第一片甚至不是个矩形，事实上它是个三角形.



第二和随后的那些片类似于矩形.



由于我们分此区域为10片，dx 的值为0.1. 各片的高度线性地增加(由于此函数是条直线)，由0.1,0.2,0.3,…,1给出. 因此我们可以近似我们的积分:

$$\int_0^1 x\,dx = (0.1)(0.1)+(0.1)(0.2)+(0.1)(0.3)+\cdots+(0.1)(1)$$
$$= 0.55.$$

注意，此近似值仅比准确面积大$\frac{5}{100}$.

§13.1 的习题

用作为面积的积分的直观定义计算下列积分.

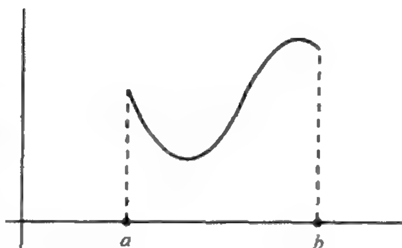
(1) $\int_0^5 3dx$.　(2) $\int_{-1}^2 5dx$　(3) $\int_0^3 x dx$.

(4) $\int_0^3 (2x+1)dx$　(5) $\int_1^3 (2x+1)dx$.　(6) $\int_2^4 5(3x-1)dx$.

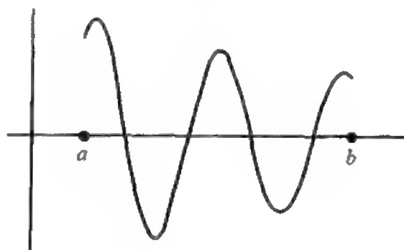
(7) 用将区域分成10块近似的矩形片断来近似计算积分$\int_0^2 x dx$. 比较你的答案和实际面积. 此近似值有多靠近?

(8) 用将区域剖分成10个近似的矩形片来近似计算积分$\int_0^2 (x+1)dx$. 将你的答案与实际面积相比较. 此近似值有多靠近?

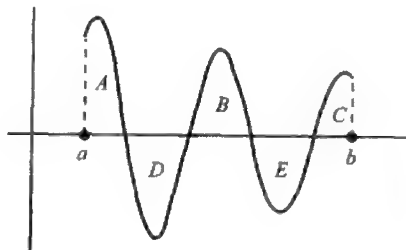
13.2 任意函数的积分



在 §13.1 中我们把注意力局限于图像在 x 轴上方的函数 $y = f(x)$（在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上）. 现在我们放弃这个限制而考虑任意连续函数（其图像可能会落在 x 轴的下方），它定义在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上.



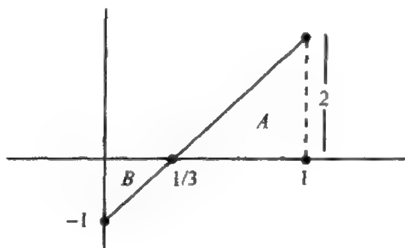
定义（直观的） 设 $f(x)$ 是定义在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的连续函数. 记号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 被定义为由曲线 $y = f(x)$，x 轴和竖直线 $x = a$ 和 $x = b$ 围成的面积，其中当 f 位于 x 轴上方时面积算作正，而位于 x 轴下方时算作负.



例 13.4 在上图中，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \text{面积}(A) + \text{面积}(B) + \text{面积}(C) - \text{面积}(D) - \text{面积}(E).$$

例 13.5 计算 $\int_0^1 (3x - 1)\mathrm{d}x$. $y = 3x - 1$ 的图像在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 由下面给出.



由于面积$(A)=\frac{2}{3}$而面积$(B)=\frac{1}{6}$,我们有$\int_0^1(3x-1)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

§13.2 的习题

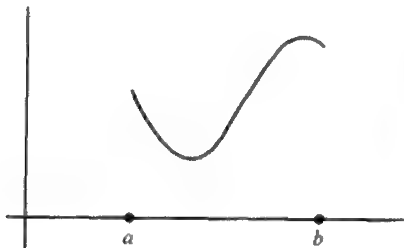
用作为面积的积分的直观定义计算下列积分.

(1) $\int_1^3(2x-4)\mathrm{d}x$ (2) $\int_{-1}^2(3x-5)\mathrm{d}x$ (3) $\int_{-3}^3 x\mathrm{d}x$.

(4) $\int_{-2}^3(4x+1)\mathrm{d}x$. (5) $\int_{-2}^{-1}(2x+1)\mathrm{d}x$. (6) $\int_{-1}^0(3x-1)\mathrm{d}x$.

13.3 作为和的极限的积分

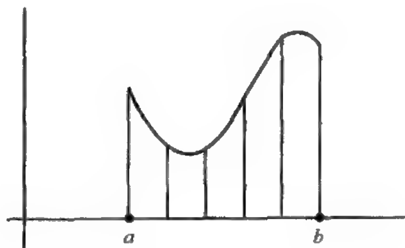
设$y=f(x)$为定义在区间$a\leqslant x\leqslant b$上的一个任意连续函数. 为了简化我们的阐述我们暂且假定f位于x轴的上方.



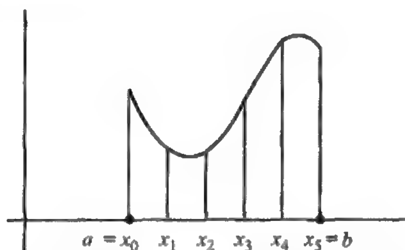
如果我们把区间$a\leqslant x\leqslant b$分割成N段(其中N是一个大的正整数),那么得到的每个小区间有长度$\frac{b-a}{N}$.

在曲线$y=f(x)$下方的面积也被分割为N个矩形型的小片;例如,如果

$N = 5$，我们有



其中每个矩形片有宽度$\frac{b-a}{5}$. 为了详细分析上图我们需要在 x 轴上标记出这些点. 在 $N = 5$ 的情况我们得到



其中 $x_0 = a$ 和 $x_5 = b$. 由于这些点是等间隔的，而任意两个相邻点的距离必为$\frac{b-a}{5}$，我们可显式地计算它们的值：

$$x_1 = a + \frac{b-a}{5},$$

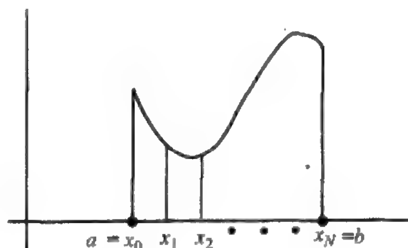
$$x_2 = a + \frac{2(b-a)}{5},$$

$$x_3 = a + \frac{3(b-a)}{5},$$

$$x_4 = a + \frac{4(b-a)}{5},$$

$$x_5 = a + \frac{5(b-a)}{5} = b.$$

更一般地，当我们分割此面积为 N 个矩形型的片，并且在 x 轴上标记上相应的点 $x_0, x_1, \cdots, x_N$，



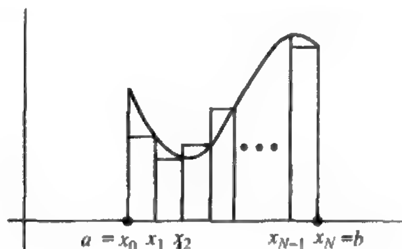
我们看到

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{N}, x_2 = a + \frac{2(b-a)}{N}, \cdots,$$

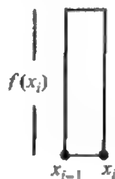
$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{N},$$

它对任意 x_i, $0 \leqslant x_i \leqslant N$ 成立.

如果现在将这些矩形(比照着矩形型的片段那样)画进我们的图像中有



于是我们添加上了 N 个宽为$\frac{b-a}{N}$的矩形,其中第 i 个矩形($1 \leqslant i \leqslant N$)



有面积$f(x_i) \cdot \frac{b-a}{N} = f\left(a + \frac{i(b-a)}{N}\right) \cdot \frac{b-a}{N}$. 由此我们看到这些矩形的面积

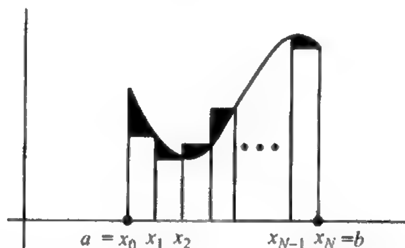
和由

$$[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_N)]\cdot\frac{b-a}{N} \tag{13.1}$$

给出,它可以表达为

$$\left[f\left(a+\frac{b-a}{N}\right)+f\left(a+\frac{2(b-a)}{N}\right)+\cdots+f\left(a+\frac{N\cdot(b-a)}{N}\right)\right]\cdot\frac{b-a}{N}.$$

当N非常大时,这个和数是曲线与x轴之间的准确面积的一个好近似. 真面积和由矩形覆盖的面积之间的差异由下面带阴影的面积画出.



当$N\to\infty$(即矩形的个数趋于无穷)时,这个带阴影的上图中的面积变为极其微小,而和(§13.1)应该趋向真实面积,这一点从直观上是清楚的.

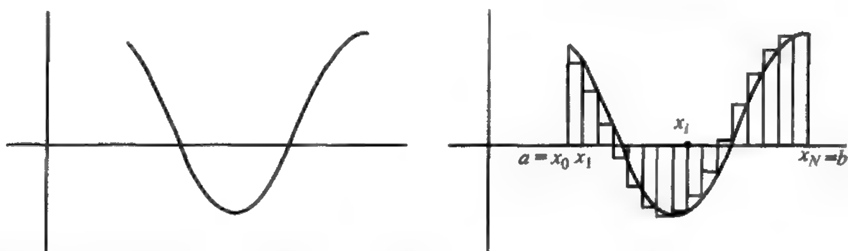
我们现在正式给出:

定义　*设$f(x)$为定义在a与b之间的区间上的任意函数(其中我们没有必要假定$a<b$),则我们定义*

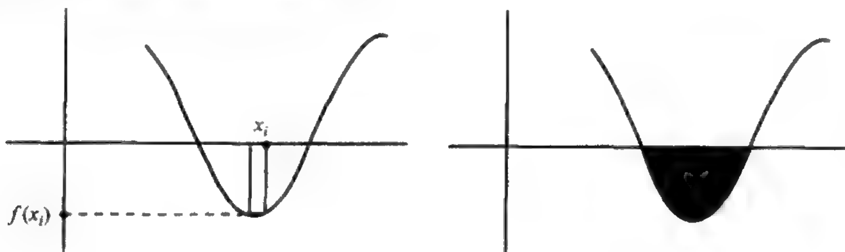
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\left[f\left(a+\frac{b-a}{N}\right)+f\left(a+\frac{2\cdot(b-a)}{N}\right)+\cdots+f\left(a+\frac{N\cdot(b-a)}{N}\right)\right]\cdot\frac{b-a}{N}.$$

但假定此极限存在. 于是我们说在a与b之间的区间上f是可积的. 当此极限不存在时积分没有定义.

注　甚至在f的图像在某些点落在x轴之下时,此定义与我们的积分直观定义是一致的. 在此曲线与x轴之间填满N个矩形,



现在我们看出如果第 i 个矩形位于 x 轴之下,则 $f(x_i) < 0$ 而且 $f(x_i) \cdot \frac{b-a}{N}$ 是 -1 乘上第 i 个矩形的面积. 所有这样的出现在此定义的项组合起来给出了在 x 轴下方的带阴影的面积(取负值).



例 13.6 应用经典公式 $1+2+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2}$(将在下一章证明)计算积分 $\int_0^2 x\mathrm{d}x$. 在此例题中 $f(x)=x, a=0, b=2$. 因此由定义,

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\mathrm{d}x &= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{2}{N}+\frac{4}{N}+\frac{6}{N}+\cdots+\frac{2N}{N}\right]\cdot\frac{2}{N}\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{4}{N^2}[1+2+3+\cdots+N]\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{4}{N^2}\cdot\frac{N(N+1)}{2}\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(2+\frac{2}{N}\right)=2.\end{aligned}$$

例 13.7 计算 $\int_1^5(2x-1)\mathrm{d}x$.

这里 $f(x)=2x-1$, 而 $a=1, b=5$. 于是

$$f\left(a+\frac{b-a}{N}\right)=f\left(1+\frac{4}{N}\right)=2\left(1+\frac{4}{N}\right)-1=1+\frac{8}{N},$$

类似地，

$$f\left(a+\frac{2(b-a)}{N}\right)=f\left(1+\frac{8}{N}\right)=2\left(1+\frac{8}{N}\right)-1=1+\frac{16}{N},$$

$$f\left(a+\frac{3(b-a)}{N}\right)=f\left(1+\frac{12}{N}\right)=2\left(1+\frac{12}{N}\right)-1=1+\frac{24}{N},$$

从而我们可以计算：

$$\begin{aligned}\int_1^5(2x-1)\mathrm{d}x&=\lim_{N\to\infty}\left[\left(1+\frac{8}{N}\right)+\left(1+\frac{16}{N}\right)+\cdots+\left(1+\frac{8N}{N}\right)\right]\cdot\frac{4}{N}\\&=\lim_{N\to\infty}\left[N+\frac{8}{N}(1+2+\cdots+N)\right]\cdot\frac{4}{N}\\&=\lim_{N\to\infty}\left[4+\frac{32}{N^2}\cdot\frac{N(N+1)}{2}\right]\\&=\lim_{N\to\infty}\left(4+16+\frac{16}{N}\right)\\&=20.\end{aligned}$$

警示　不是每个函数都是可积的. 例如，函数$\frac{1}{x-1}$在任何包含 1 的区间上是不可积的，这是因为在曲线下方的面积成为无穷大.

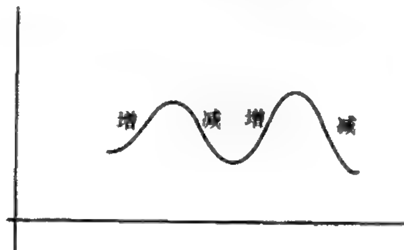
准确确定哪些函数是可积的问题既有趣又困难. 在下面的命题中我们将考察某些足以证明可积性的假定，并给出了此问题的部分解答. 我们需要一个定义.

定义　称一个函数$f(x)$在一个区间$a\leqslant x\leqslant b$是**非降的**(相应，**非增的**)是说，假设对所有d,c，满足$a\leqslant d\leqslant c\leqslant b$，有$f(d)\leqslant f(c)$(相应，$f(d)\geqslant f(c)$).

我们现在考虑一个重要命题.

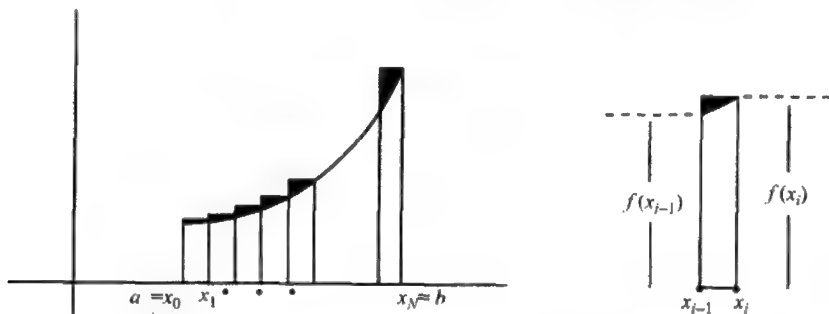
命题 13.8　如果一个函数在某个区间上连续且非降(或非增)，则它在此区间可积.

注　一般地，当我们分析一个连续函数的图像时会看到它在不同的子区间上或非降式非增. 因此命题 13.8 包括了大范围的函数.

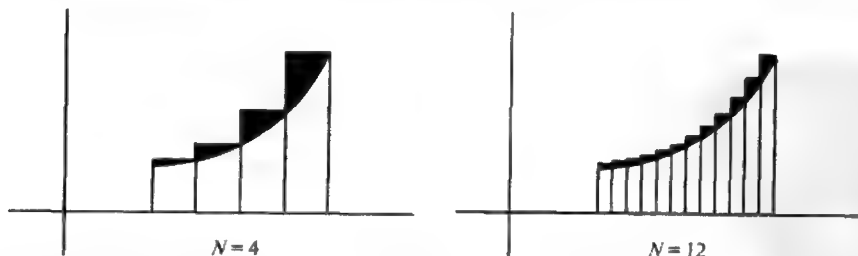


我们在位于 x 轴上方的非降函数的情况下给出命题 13.8 的一个快速的概述性的证明. 当函数位于 x 轴下方的情形其证明相似,留给读者. 对于最一般的情形,我们将在曲线与 x 轴之间的区域分成许多段,每段中它或在 x 轴的下方,或在 x 轴的上方,然后再将这些段适当地加起来. 非增函数的情形则完全是类比的,故而略去其证明.

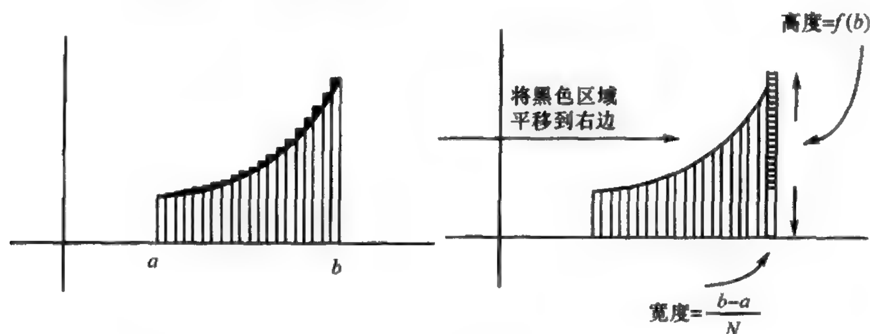
由于 f 是非降的,其图像必定类似于下面的左图,从而下左图中带阴影的区域必定全在曲线的上方. 注意,第 i 个阴影区域的最大厚度正好是 $f(x_i)-f(x_{i-1})$.



由于当 $N\to\infty$ 时 $x_i-x_{i-1}=\frac{1}{N}$ 可任意小, f 的连续性确保了第 i 个带阴影的区域的最大厚度也在 $N\to\infty$ 时变为任意小. 由此看出所有带阴影区域的总面积当 $N\to\infty$ 时必定趋向 0,例如,当 $N=4,12$,我们看到阴影区域总面积戏剧性地减少.



带阴影区域面积的和当 $N\to\infty$ 时趋向 0 的一个简单几何证明可在下图中看到. 那就是,将所有小的黑色区域滑移到右边,所得到的带阴影区域所具有的面积小于底边为 $\frac{b-a}{N}$ 高为 $f(b)-f(a)$ 的矩形的面积.



由此推出,当 $N\to\infty$ 时,这 N 个矩形的面积和

$$\left[f\left(a+\frac{b-a}{N}\right)+f\left(a+\frac{2(b-a)}{N}\right)+\cdots+f\left(a+\frac{N\cdot(b-a)}{N}\right)\right]\cdot\frac{b-a}{N}$$

减小并趋向于一个确定的极限,即曲线下方的面积.

§13.3 的习题

用作为和的极限的积分定义计算下列积分. 你可能会用到公式 $1+2+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2}$.

(1) $\int_0^5 x\,\mathrm{d}x$.　　(2) $\int_{-1}^2 x\,\mathrm{d}x$.　　(3) $\int_1^2 (4x-1)\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int_{-3}^3 x\,\mathrm{d}x$.　　(5) $\int_{-2}^{-1} (2x+1)\,\mathrm{d}x$.　　(6) $\int_{-1}^0 (3x-1)\,\mathrm{d}x$.

13.4　积分的性质

积分满足许多基本的性质,它们可直接从定义得到.

性质 1　设 $f(x)$ 在 a 和 b 之间的区间上可积,且设 K 为一常数. 于是

$$\int_a^b Kf(x)\,\mathrm{d}x=K\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

性质 2　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 a 和 b 之间的区间上的可积函数. 可是

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

性质 3　设 $a\leqslant c\leqslant b$. 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明(用图形).



在曲线 $y=f(x),a\leqslant x\leqslant b$ 下方的面积(上图中由 A 表示)只不过是面积 B 加上面积 C 而已.

性质4 已知任意实数 a,b,有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 从基本定义开始. 由于 $b-a=-(a-b)$,我们有

$$\sum_{n=1}^{N} f\left(a+\frac{(b-a)n}{N}\right)\cdot\frac{b-a}{N}=-\sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{aN+(b-a)n}{N}\right)\cdot\frac{a-b}{N}$$

每个 $1\leqslant n\leqslant N$ 的 n 可以写成形式 $n=N-m,1\leqslant m\leqslant N$. 代入并简化,得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} f\left(a+\frac{(b-a)n}{N}\right)\cdot\frac{b-a}{N}&=-\sum_{m=1}^{N} f\left(\frac{aN+(b-a)(N-m)}{N}\right)\cdot\frac{a-b}{N}\\&=-\sum_{m=1}^{N} f\left(\frac{bN+(a-b)m}{N}\right)\cdot\frac{a-b}{N}\\&=-\sum_{m=1}^{N} f\left(b+\frac{(a-b)m}{N}\right)\cdot\frac{a-b}{N}.\end{aligned}$$

现在证明由定义得到.

命题13.9 *设 $f(x)$ 是 a 和 b 之间的区间上的可积函数. 如果存在数 m 和 M 使得*

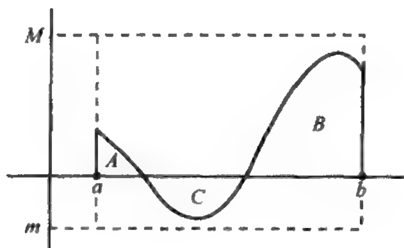
$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

对所有区间中的 x 成立,则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

注 在命题 13.9 中提到的数 m 和 M 各自叫做函数 $f(x)$ 的下界和上界.

证明(用图形).



从上图中观察到

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{面积}(A) + \text{面积}(B) - \text{面积}(C)$$
$$\leqslant \text{面积}(A) + \text{面积}(B)$$
$$\leqslant M\cdot(b-a),$$

而

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant -\text{面积}(C)$$
$$\geqslant m(b-a),$$

这是因为此图中 m 是负的. 上面图形代表了一种特殊情况,但是却具有最一般情形的典型性.

第十三章的附加习题

(1) 设

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{如果 } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

用你的CAS作f的图像,你能找出f的上、下界吗?它们有限吗?对f的可积性你有何结论?你能得出f下方的面积吗?对f在$x=-1$和$x=1$的可微性你能说些什么?

(2) 证明如果在某区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上 $f(x)\leqslant g(x)$,则$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$. **提示**:分割 $a\leqslant x\leqslant b$ 为 n 等分 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,其中$x_i-x_{i-1}=h=\frac{b-a}{n}$,并用例13.7中的方法.

(3) 设$f(x)$是区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的一个固定函数. 假设已知点 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. 定义 $s(x)=f(x_i)$,如果 $x_{i-1}\leqslant x<x_i$. 称函数 $s(x)$ 为一个**阶梯函数**. 在你的 CAS 上作 $s(x)$ 的图像,并对下列的阶梯函数得出$\int_a^b s(x)\,dx$:

(a) 1 2 3 4 5 6 $\leftarrow x$,
0 1 2 1 1 0 $\leftarrow s(x)$.

(b) 0 $\frac{1}{2}$ 1 3/2 2 5/2 $\leftarrow x$,
−1 −2 −1 2 1 −2 $\leftarrow s(x)$.

(c) −1 0 1 2 3 4 $\leftarrow x$,
1/4 0 1/2 1/2 1 1/4 $\leftarrow s(x)$.

在下列问题中使用了记号 $\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$.

(4) 用公式 $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ 计算 $\int_0^b x^2 \mathrm{d}x$ 并比较你的结果和你的 CAS 给出的结果.

(5) 用前 n 个立方的公式 $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ 计算积分 $\int_0^b x^3 \mathrm{d}x$.

(6) 推广前面两个问题到 $\int_0^b x^m \mathrm{d}x, m \geqslant 1$. **提示**:对 $m = 1, 2, \cdots$ 用你的 CAS. 你看出了一个模式吗?用归纳证明你的模式的公式.

(7) 求 $\int_0^1 \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$ 的近似值. 取 $n = 10, 20, 30$. **提示**:对 $a = 0, b = 1$ 计算 $\sum_{i=0}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \frac{b-a}{n}$. 比较你的结果和你的 CAS 给出的结果. 当 n 增大时此近似值如何变化?

(8) 对 $f(x) = \sin(x^2)$ 做(7)同样的事.

(9) 对 $f(x) = x/\ln(x)$ 做(7)同样的事.

(10) 对 $f(x) = x^2 \exp(-x^2)$ 做(7)同样的事.

(11) 计算 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^2}$ 的近似值. 用 $n = 10, 20$. **提示**:注意被积项是个偶函数.

(12) 已知 $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$. 你能用在 0 和 N 之间的区间上和 $n = 10, 40$ 求此积分近似值的方法来验证此结果吗?选取增大 N 的值用你的 CAS 积分来验证你的结果.

(13) 用 $n = 10, 30$ 作 $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \mathrm{d}x$ 的近似值. 注意,这将给出四分之一圆的面积的近似值. 你能推导出 π 的一个近似值吗?

第十四章　和，归纳，积分的计算

14.1　和

在第十三章中我们定义积分为一个和的序列的极限. 由于我们将详细地与这些和打交道，引进一个求和的简略表达记号是方便的(从而公式不会占据了整整一页).

设f是个定义于整数上的函数. 我们要引进一个记号使得我们能容易地写下长长的和数，比如

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8).$$

传统上，希腊字母$\sum$ (sigma) 代表和，而上式被写成

$$\sum_{n=1}^{8} f(n),$$

其中n为求和指标. 相似地，和

$$f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)+f(9)$$

可简洁地写成形式$\sum_{n=4}^{9} f(n)$. 一般的定义是：

定义　设f是定义在整数上的函数，且设$M \leqslant N$为任意两个整数. 我们定义

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = f(M) + f(M+1) + \cdots + f(N).$$

例 14.1 设 $f(x) = x^3, M = 1, N = 3$,则

$$\sum_{n=1}^{3} f(n) = \sum_{n=1}^{3} n^3 = 1 + 8 + 27 = 36.$$

例 14.2 设 $f(x) = x^2 - 2, M = 3, N = 5$,则

$$\sum_{n=3}^{5} f(n) = \sum_{n=3}^{5} (n^2 - 2) = (9-2) + (16-2) + (25-2) = 44.$$

例 14.3 设 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right), M = 1, N = 4$,则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{4} f(n) &= \sum_{n=1}^{4} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= -1.\end{aligned}$$

漂亮的公式

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2} \tag{14.1}$$

是高斯 9 岁时就发现过的. 它由将此和中的项按相反方向重写下来并与原来同位的项相加而容易地得到证明:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & +2 & +3 & + & \cdots & +N \\ + & & & & & \cdots & \\ & N & +(N-1) & +(N-2) & + & \cdots & +1 \\ \hline & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{(N+1) + (N+1) + \quad (N+1) + \quad + \quad \cdots \quad + (N+1)}_{N次}.} \end{array}$$

例如,当 $N = 100, 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$,因为 $[1 + 2 + 3 + \cdots + 100] + [100 + 99 + 98 + \cdots + 1] = \underbrace{[101 + 101 + \cdots + 101]}_{100次}$

§14.1 的习题

在你的 CAS 上用求和(SUM) 功能计算下列和.

(1) $\sum_{n=1}^{10} n^3$. (2) $\sum_{n=10}^{20} n^2$. (3) $\sum_{n=1}^{8} (2n^3+3n-1)$.

(4) $\sum_{n=1}^{10} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$. (5) $\sum_{n=1}^{10} \cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$. (6) $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^3}$.

(7) $\sum_{n=1}^{5} 2^n$. (8) $\sum_{n=1}^{5} 2^{-n}$. (9) $\sum_{n=1}^{7} (3+5\cdot 2^{-n})$.

(10) 计算和 $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$，$N = 10, 100, 1000$. 观察出此和趋向于 $\pi^2/6$.

(11) 计算和 $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$，$N = 10, 100, 1000$. $\ln(N)$ 是对此和的一个好近似吗？

14.2 归纳

有另一个证明高斯的公式(14.1) 的方法. 我们现在通过提出(14.1) 的第二个证明来解释这个归纳法.

容易验证(14.1) 式对 N 的小值成立. 例如

$$1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2},$$
$$1+2 = \frac{2\cdot 3}{2}, \tag{14.2}$$
$$1+2+3 = \frac{3\cdot 4}{2}.$$

假若我们能证明下面的叙述对任意正整数 N 成立：

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2} \text{ 蕴涵了 } \sum_{n=1}^{N+1} n = \frac{(N+1)(N+2)}{2}, \tag{14.3}$$

则断言高斯的公式得证.

要明白这里的推理首先想像一个(无限的) 梯子. 如果我们知道能(1) 爬上第一级梯阶，以及(2) 一旦在第 N 级梯阶上能爬上第($N+1$) 级梯阶，于是事实上能爬上此梯子的任何高度. 现在用验证(14.3) 来证明高斯的公式(因为我们已经检验过(14.2) 的初始情形). 假定现在

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1+2+3+\cdots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

对某个正整数 N 成立，由此得到

$$\sum_{n=1}^{N+1} n = (1+2+3+\cdots+N)+(N+1)$$
$$= \frac{N(N+1)}{2} + N + 1$$

$$= \frac{N^2 + N + 2(N+1)}{2}$$

$$= \frac{N^2 + 3N + 2}{2}$$

$$= \frac{(N+1)(N+2)}{2},$$

按预期它得以建立.

问题 求对 $\sum_{n=1}^{N} n^2$ 的公式.

解答 我们采取一个试验的处理方式. 由高斯的公式启发,我们可假设一个公式,其形式为

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \alpha N^3 + \beta N^2 + \gamma N + \delta,$$

其中 α,β,γ 和 δ 是某些常数. 代入 $N = 1,2,3,\cdots$ 产生了

$$1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$
$$1 + 4 = 8\alpha + 4\beta + 2\gamma + \delta,$$
$$1 + 4 + 9 = 27\alpha + 9\beta + 3\gamma + \delta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

我们现在需要利用 CAS 求出正确的 α,β,γ 和 δ 的值. 恰似爱迪生把电流通过成百种金属才发现了钨发光那样,我们也必须进行试验性工作并努力找出 α,β,γ 和 δ 的正确值. 它们原来是

$$\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{6}, \delta = 0.$$

我们用归纳来证明,对 $N \geqslant 1$,有

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}.$$

初始情形容易被检验:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$1 + 4 = \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + \frac{2}{6},$$

$$1 + 4 + 9 = \frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + \frac{3}{6}.$$

现在假定 $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}$ 对某个 $N > 1$ 成立,我们必须证明

$$\sum_{n=1}^{N+1} n^2 = \frac{(N+1)^3}{3} + \frac{(N+1)^2}{3} + \frac{(N+1)}{6}.$$

容易得到(稍微借助一下 CAS)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1} n^2 &= \left(\sum_{n=1}^{N} n^2\right) + (N+1)^2 \\ &= \frac{N^3}{3} + \frac{N^3}{2} + \frac{N}{6} + N^2 + 2N + 1 \\ &= \frac{(N+1)^3}{3} + \frac{(N+1)^2}{2} + \frac{N+1}{6}.\end{aligned}$$

注　重要之处是要记住,如果我们没有找出 α,β,γ 和 δ 的正确值,则归纳法就不能进行.

概括起来,我们现在找到了公式

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} 1 &= N, \\ \sum_{n=1}^{N} n &= \frac{N(N+1)}{2}, \\ \sum_{n=1}^{N} n^2 &= \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}.\end{aligned} \tag{14.4}$$

把这些公式以任意常数 a,b 和 c 代数地组合起来,我们得到了

$$\sum_{n=1}^{N} (an^2 + bn + c) = a \cdot \left(\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}\right) + b \cdot \left(\frac{N(N+1)}{2}\right) + c \cdot N.$$

§14.2 的习题

(1) 收集实验数据以找出 $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$ 的公式. 用归纳法证明你的公式.

(2) 收集实验数据以找出 $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}$ 的公式. 用归纳法证明你的公式.

(3) 收集实验数据以找出 $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n}$ 的公式. 用归纳法证明你的公式.

(4) 用归纳法证明 $\sum_{n=1}^{N} n^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$.

(5) 用归纳法证明 $\sum_{n=1}^{N} n^4 = \frac{N^5}{5} + \frac{N^4}{2} + \frac{N^3}{2} - \frac{N}{30}$.

(6) 用归纳法证明对任意 $a \neq 1$, $\sum_{n=1}^{N} a^n = \frac{a^{N+1}-1}{a-1}$.

14.3 积分的计算

用刚刚阐述的求和记号我们可以把积分的定义重写为下面的形式:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{N} f\left(a + \frac{n(b-a)}{N}\right)\right]\cdot\frac{b-a}{N}$$

显示在(14.3)的这种类型的公式常常能用来计算积分. 我们给出三个例题.

例 14.4 计算 $\int_0^2 x^2\,dx$.

这里 $a = 0, b = 2$, 而 $f(x) = x^2$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2\,dx &= \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2n}{N}\right)^2\right]\cdot\frac{2}{N}\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{8}{N^3}\sum_{n=1}^{N} n^2\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{8}{N^3}\left(\frac{N^3}{3}+\frac{N^2}{2}+\frac{N}{6}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{N}+\frac{4}{3N^2}\right) = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

例 14.5 计算 $\int_0^B x^2\,dx$.

这里 $a = 0, b = B$, 而 $f(x) = x^2$. 极像在例 14.4 中那样计算, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^B x^2\,dx &= \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{nB}{N}\right)^2\right]\cdot\frac{B}{N}\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{B^3}{N^3}\sum_{n=1}^{N} n^2\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{B^3}{N^3}\left(\frac{N^3}{3}+\frac{N^2}{2}+\frac{N}{6}\right) = \frac{B^3}{3}.\end{aligned}$$

例 14.6 计算 $\int_{-1}^{3}(x^2 - 3x)\,dx$.

在这个最后面的例子中, $a = -1, b = 3$ 且 $f(x) = x^2 - 3x$. 用像我们前面的方法:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}(x^2-3x)\,dx &= \lim_{N\to\infty}\left(\left(-1+\frac{4n}{N}\right)^2-3\left(-1+\frac{4n}{N}\right)\right)\cdot\frac{4}{N}\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{4}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(4-\frac{20n}{N}+\frac{16n^2}{N^2}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{16}{N}\sum_{n=1}^{N}1-\frac{80}{N^2}\sum_{n=1}^{N}n+\frac{64}{N^3}\sum_{n=1}^{N}n^2\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(16-\frac{80}{N^2}\frac{N(N+1)}{2}+\frac{64}{N^3}\left(\frac{N^3}{3}+\frac{N^2}{2}+\frac{N}{6}\right)\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(16-40-\frac{40}{N}+\frac{64}{3}+\frac{32}{N}+\frac{64}{6N^2}\right)\\ &= 16-40+\frac{64}{3}=\frac{-8}{3}.\end{aligned}$$

§14.3 的习题

用作为和的极限的积分定义计算下列积分. 在习题(4),(5)和(6)中 A,B 为任意实数.

(1) $\int_1^4 x^2\,dx$.　　(2) $\int_{-1}^{3}(x^2-x)\,dx$.　　(3) $\int_0^3 x^3\,dx$.

(4) $\int_0^B x^3\,dx$.　　(5) $\int_A^B x^2\,dx$.　　(6) $\int_A^B x^3\,dx$.

(7) 对任意值 A,B 用公式 $\sum_{n=1}^{N}n^4=\frac{N^5}{5}+\frac{N^4}{2}+\frac{N^3}{3}-\frac{N}{30}$ 计算积分 $\int_A^B x^4\,dx$.

(8) 用公式 $\sum_{n=1}^{N}n^k=\frac{N^{k+1}}{R+1}+\frac{N^k}{2}+p(N)$，其中 $p(N)$ 是个次数小于 k 的多项式，证明 $\int_0^B x^k\,dx=\frac{B^{k+1}}{k+1}$ 对任意 B 成立.

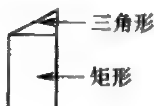
14.4 积分的近似计算

并不是总能求出一个积分的准确值. 例如，如果你试图在你的 CAS 计算 $\int_0^1 2^{-x^2}\,dx$，它将不可能提供一个准确的答案. 然而，譬如说你明确说明为 5 位精度，你得到的答案为 0.810 02. 这个结果是如何得到的?已设计出许多数值积分的方法，而你特定的 CAS 所用的方法并不总是众人皆知的信息. 为指出这样一种方法的一个例子，我们要提出众所周知的梯形法，它以简单的快捷作为突出

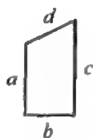
特点. 一个梯形是个四边形,



它可以被剖分为一个矩形和一个三角形,正如下图所示.



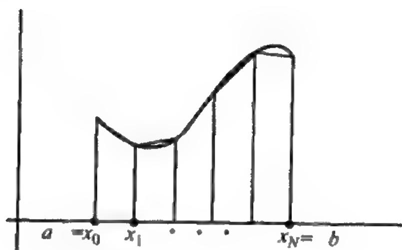
如果梯形的边有长度 a,b,c,d,

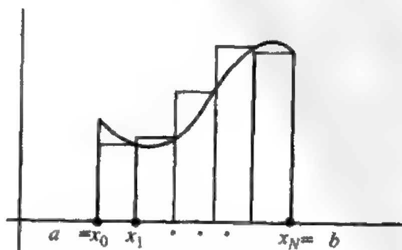


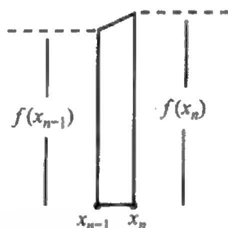
则其面积为$\frac{1}{2}(a+c)\cdot b$(因为矩形部分的面积是 $a\cdot b$,而三角形部分的面积是 $\frac{1}{2}(c-a)\cdot b$).



梯形法的基本思想是要逼近 $y=f(x)$ 下方的面积,其方法是用 N 个相等宽度为 $\frac{b-a}{N}$ 的梯形,而不是像我们早前所做的那样,使用 N 个矩形去逼近.







第 n 个梯形的面积由公式

$$\frac{1}{2}[f(x_{n-1})+f(x_n)]\cdot\frac{b-a}{N}$$

给出.

将这些梯形的面积加起来给出我们近似值

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}[f(x_{n-1})+f(x_n)]\cdot\frac{b-a}{N},$$

当 N 大时,它将相当精确. 注意,符号 $\approx$ 的使用表示的意思是**近似地等于**.

例 14.7 用 $N=4$ 个梯形近似 $\int_0^1 2^{-x^2}dx$.

这里 $f(x)=2^{-x^2}$,以及 $a=0,b=1,x_0=0,x_1=\frac{1}{4},x_2=\frac{2}{4},x_3=\frac{3}{4}$ 及 $x_4=1$. 梯形近似给了我们

$$\begin{aligned}\int_0^1 2^{-x^2}dx&\approx\Big[\frac{1}{2}(2^{-0}+2^{-\frac{1}{16}})+\frac{1}{2}(2^{-\frac{1}{16}}+2^{-\frac{1}{4}})\\&\quad+\frac{1}{2}(2^{-\frac{1}{4}}+2^{-\frac{9}{16}})+\frac{1}{2}(2^{-\frac{9}{16}}+2^{-1})\Big]\cdot\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{8}\Big[1+2\times2^{-\frac{1}{16}}+2\times2^{-\frac{1}{4}}+2\times2^{-\frac{9}{16}}+\frac{1}{2}\Big]\\&\approx0.806\,41,\end{aligned}$$

它相当接近于 0.810 02(它是精确到 5 位小数的正确答案).

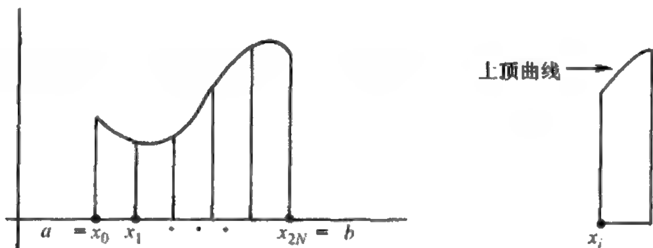
例 14.8 用 5 个梯形近似 $\int_1^3\frac{1}{x}dx$.

在此最后的例题中 $f(x)=\frac{1}{x},a=1,b=3,x_0=1,x_1=7/5,x_2=9/5,x_3=11/5,x_4=13/5$,及 $x_5=3$.

$$\begin{aligned}\int_1^3\frac{1}{x}dx&\approx\Big[\frac{1}{2}\Big(1+\frac{5}{7}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{5}{7}+\frac{5}{9}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{5}{9}+\frac{5}{11}\Big)\\&\quad+\frac{1}{2}\Big(\frac{5}{11}+\frac{5}{13}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{5}{13}+\frac{1}{3}\Big)\Big]\cdot\frac{2}{5}\\&\approx1.110\,3.\end{aligned}$$

我们以**辛普森法**结束本节. 托马斯·辛普森(1710—1761)曾被训练成为一个纺织工人;他发现了一个通常比梯形法还要好的近似积分方法. 想法是将曲线和 x 轴之间的面积剖成 $2N$ 个矩形型的片段,其中第 i 片有形式,而在上顶处的曲线由一条抛物线给出而不是一条直线(它出现在梯形法中). 它在极多的情形

下会产生一种更紧密的安排,从而所有这些矩形型区域的和给出对积分的更好近似.这个方法现在以辛普森法命名,其近似公式有形式



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3}[f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] \cdot \frac{b-a}{2N}.$$

例 14.9 用 $2N = 6$ 的辛普森法近似 $\int_1^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

这里 $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1, b = 3, x_0 = 1, x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = 2, x_4 = \frac{7}{3}$, $x_5 = \frac{8}{3}$, 及 $x_6 = 3$. 辛普森法给了我们下面的近似:

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\left[1 + 4 \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right] \times \frac{2}{6} + \frac{1}{3}\left[\frac{3}{5} + 4 \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7}\right] \times \frac{2}{6} \\ &\quad + \frac{1}{3}\left[\frac{3}{7} + 4 \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3}\right] \times \frac{2}{6} \\ &\approx 1.098\,9\cdots.\end{aligned}$$

事实上,到 5 位的正确答案是 1.098 6,故而这时辛普森的方法精确到误差在万分之四以内!比较此结果与例 14.8 中梯形法得到的结果.

§14.4 的习题

在下列习题中,用梯形法和辛普森法以 $N = 4, 10, 50$ 计算积分的近似值.比较这两种方法产生的答案.

(1) $\int_{-1}^3 (x^2 + 2x)\mathrm{d}x$.　(2) $\int_{-2}^1 (3x^2 + 4)\mathrm{d}x$.　(3) $\int_0^2 \sqrt{2 + x}\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int_0^3 \frac{1}{2 + x^2}\mathrm{d}x$.　(5) $\int_0^2 2^{-x}\mathrm{d}x$.　(6) $\int_{-1}^1 e^{-2x^2}\mathrm{d}x$.

(7) $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$. (8) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{3+x^4}}$. (9) $\int_{-2}^2 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

(10) $\int_0^2 x\cos(\pi x)dx$. (11) $\int_0^3 \frac{\sin(x)}{x}dx$. (12) $\int_{-2}^3 \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x^4}}dx$.

(13) 设 $y = ax^2 + bx + c$ 为一抛物线. 用 $N = 3$ 的辛普森法证明辛普森法给出了积分 $\int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx$ 的准确值.

第十四章的附加习题

(1) 以 $N = 4,10$,并且用左边各端点作为近似矩形的高,计算 $\int_{-1}^3 (x^2 + 2x)dx$,再用各个右端点作为近似矩形的高作计算. 取这两个近似值的平均值,并将你的结果与梯形法进行比较. 你的结论是什么?

(2) 用半径 R 的圆面积为 πR^2 的事实对 π 进行估值. 也就是说,假定 $x^2 + y^2 = 9$,故在第一象限中 $y = \sqrt{9 - x^2}$. 现用 $N = 4,10,50$ 时的辛普森法对 $9\frac{\pi}{4} = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}dx$ 估值.

(3) 用关系 $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ 和 $N = 10$ 的辛普森法对 π 估值.

(4) 设 $f(x) = x^2, 0 \le x \le 2$.

(a) 用矩形和左端点确定 $N = 4$ 时 $\int_0^2 x^2 dx$ 的一个下界.

(b) 用 $N = 4$ 的矩形和右端点确定 $\int_0^2 x^2 dx$ 的一个上界.

(c) 证明这两个估值之差为 1.

(5) 设 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 区间上为增函数. 不用梯形而用 N 个矩形来逼近 $\int_a^b f(x)dx$. 每个矩形的高或是左边的或是右边的端点. 如果用左端点,我们得到一个下界,如果用右端点我们得到一个上界. 证明上界和下界的差是 $(f(b) - f(a))\frac{b-a}{N}$. 这个表达式叫做由左手规则来的误差.

(6) 对区间 $1 \le x \le 3$ 上的函数 $\exp(x^2)$,求 N,使得由左手规则来的误差(在(5)中定义)小于 $\frac{1}{50}$. 用你的 CAS 检验.

(7) 设 L 为对所有 $a \le x \le b$ 满足 $|f''(x)| \le L$ 的任意数,而 M 为使 $|f^{(4)}(x)| \le M$ 的任意数. 已知由 N 个子区间的辛普森法产生误差的绝对值最多为 $M\frac{(b-a)^5}{180N^4}$,而由梯形法产生误差的绝对值最多为 $L\frac{(b-a)^3}{12N^2}$.

(a) 用 $N = 10$ 计算$\int_1^3 \exp(x^2)\,dx$ 的绝对误差值.

(b) N 应该多大，才能保证用辛普森法计算的$\int_1^3 \exp(x^2)\,dx$ 的绝对误差值最多为 0.000 02?

(8) 还是π的另一个估值，N应该多大才能保证$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ 的近似值的绝对误差在10^{-3}以内.

(9) 设
$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{如果 } x \leqslant 1, \\ -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}, & \text{其他.} \end{cases}$$

(a) 用 $N = 10, 40$ 时的辛普森法对$\int_0^5 f(x)\,dx$ 估值.

(b) 尽管$f(x)$不是可微的，你能找到绝对误差的一个界吗?提示:用你的 CAS.

用归纳法证明下列公式.

(10) $\sum_{n=1}^{N}(2n-1) = N^2$.

(11) $\sum_{n=1}^{N} n^5 = \frac{1}{12}N^2(N+1)^2(2N^2+2N-1)$.

(12) $\sum_{n=1}^{N}(2n-1)^2 = \frac{1}{3}N(4N^2-1)$.

(13) $\sum_{n=1}^{N} n(n+1)^2 = \frac{1}{12}N(N+1)(N+2)(3N+5)$.

(14) $\sum_{n=1}^{N} n!\cdot n = (N+1)!-1$.

(15) $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n^2-1)} = \frac{3}{4} - \frac{2N+1}{2N(N+1)}$.

第十五章　作为反导数的积分

15.1　微积分基本定理

在例 14.5 中我们已证明

$$\int_0^X x^2 \mathrm{d}x = \frac{X^3}{3},$$

而且更进一步在 §14.3 的习题(4),(7) 和(8) 中也看到

$$\int_0^X x^3 \mathrm{d}x = \frac{X^4}{4}, \quad \int_0^X x^4 \mathrm{d}x = \frac{X^5}{5}, \quad \int_0^X x^k \mathrm{d}x = \frac{X^{k+1}}{k+1},$$

其中 $k = 0,1,2,\cdots$. 在上面的所有例子中,积分的导数原来就是我们进行积分的函数. 这提示了在积分和微分之间的一种联系. 回想起积分是面积的计算而微分则是曲线的切线斜率的计算. 这样两个似乎迥异的计算过程竟然被联系一起,实在非同凡响!积分是微分的逆(即反导数) 完全是非显而易见的,而我们现在要叙述和证明的微积分基本定理将使这点变得确切.

定理 15.1(微积分基本定理)　*设 $f(x)$ 为 a 与 b 之间的区间上的连续和可微的函数. 于是存在一个可微函数 $f(x)$,它在此区间上具有性质*

$$f'(x) = f(x)$$

以及

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

注 基本定理所提及的函数 $F(x)$ 被称为一个**反导数**. 自然要问,反导数是否唯一?事实上如果有两个函数 F_1 和 F_2 使 $f'_1(x) = f'_2(x) = f(x)$,则必有

$$\frac{d}{dx}(F_1(x) - F_2(x)) = 0,$$

因此由命题 7.3 有

$$F_1(x) - F_2(x) = c,$$

c 为某个常数. 注意,不管是哪个反导数, $f(b) - F(a)$ 的值总是一样的. 已知反导数 F_1 和 F_2,由于 $F_1(x) - F_2(x) = c$ 对某个常数 c 成立,我们有

$$\begin{aligned} F_1(b) - F_1(a) &= (F_2(b) + c) - (F_2(a) + c) \\ &= F_2(b) - F_2(c). \end{aligned}$$

基本定理让我们快速而容易地计算出许多积分而不用诉求于和数与极限.

例 15.2 计算 $\int_{-1}^{3} x^4 dx$.

这里 $f(x) = x^4$,而且对 $F(x)$ 的一种可能的选取是 $\frac{x^5}{5}$.

$$\int_{-1}^{3} x^4 dx = F(3) - F(-1) = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{244}{5}$$

例 15.3 计算 $\int_0^1 (x^3 - 2x + 1) dx$.

这里 $f(x) = x^3 - 2x + 1$,而我们选取的反导数为 $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + x$. 我们得到

$$\int_0^1 [x^3 - 2x + 1] dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - 0 = \frac{1}{4}$$

例 15.4 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{3\pi} \cos(3x) dx$.

在这个例子中 $f(x) = \cos(3x)$ 而 $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$. 这给了我们

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{3\pi} \cos(3x) dx &= F(3\pi) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\sin(9\pi) - \frac{1}{3}\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

记号 以下面的格式(利用反导数)写出积分计算现在已成为标准的常规工作了:如果我们要计算 $\int_a^b f(x) dx$,且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个反导数,即 $f'(x) = f(x)$,

我们则写下

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

例如，

$$\int_1^3 x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4,$$

以及

$$\int_0^{10}(x^3+1)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Big|_1^{10} = \frac{10^4}{4} + 10 - 0 = 2510.$$

例 15.5 计算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\int_1^X (x^2+\sin(x))\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

如果 $F(x)$ 是一个使 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = (x^2+\sin(x))\mathrm{e}^{-x^2}$ 的函数，则由于

$$\int_1^X (x^2+\sin(x))\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = F(X) - F(1),$$

我们有

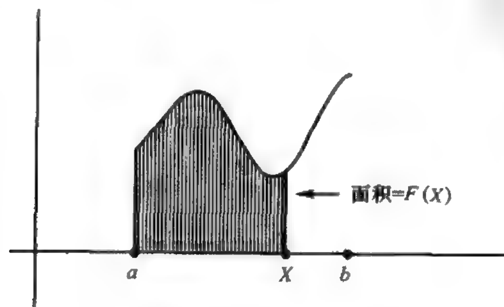
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\int_1^X (x^2+\sin(x))\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = (X^2+\sin(X))\mathrm{e}^{-X^2}.$$

基本定理的证明 我们提出一个对图像在 x 轴上方的函数的证明. 这个限制容易去掉；我们把一般情形留给读者.

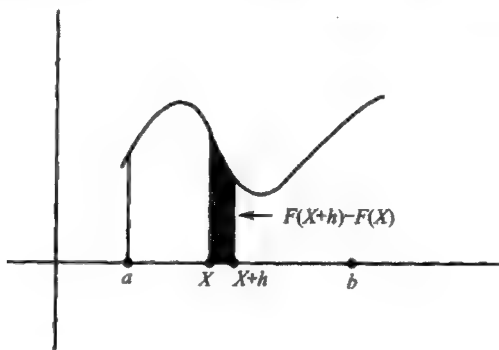
对在区间 $a \leqslant X \leqslant b$ 的任意 X，由规则

$$F(X) = \int_0^X f(x)\mathrm{d}x$$

定义一个函数 $F(X)$. 注意，这里的 X 是个变量，它与积分变量 x 完全无关. 于是 $F(X)$ 代表了对 $a \leqslant x \leqslant X$ 的曲线 $y = f(x)$ 下方的面积.



我们知道，对小的 h, $f(X+h)-F(X)$ 是宽度 h 的矩形长条的面积：



因此，由于 f 是连续的，对充分小的 h

$$F(X+h)-F(X)\approx h\cdot f(X).$$

由此得到

$$\lim_{h\to0}\frac{F(X+h)-F(X)}{h}=f(X).$$

因此我们已经证明了 $F'(x)=f(x)$，和

$$\int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x=F(X). \qquad (15.1)$$

当 $X=a$ 时注意 $F(a)=\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$，而且当我们选取 $X=b$ 时我们看出

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)=F(b)-F(a),$$

这是因为（正如刚刚看到的那样）$F(a)=0$.

§15.1 的习题

计算下列定积分.

(1) $\int_1^3 13\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_1^5 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

(3) $\int_1^7 \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int_2^{10}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

(5) $\int_0^3 (1+x)^3\,\mathrm{d}x$.

(6) $\int_{\frac{1}{2}}^4 (1+x)^4\,\mathrm{d}x$.

(7) $\int_1^5 \frac{7}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

(8) $\int_{-4}^{-2} \frac{7}{x^5}\,\mathrm{d}x$.

(9) $\int_0^1 x\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$.

(10) $\int_0^3 x(\sqrt{x}+x^3)\mathrm{d}x$.

(11) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

(12) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x$.

(13) $\int_1^{10} \frac{x-1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(14) $\int_0^1 x^{1.7}\mathrm{d}x$.

(15) $\int_2^4 \frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{d}x$.

(16) $\int_0^1 (x^7+x+3)\cdot(x^2-3)\mathrm{d}x$.

(17) $\int_0^2 (x^7+x+3)\cdot(\sqrt{x}-3)\mathrm{d}x$.

(18) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\mathrm{d}x$.

(19) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(4x)\mathrm{d}x$.

(20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x)+\sin(x))\mathrm{d}x$.

(21) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (2\sin(x)+\sec^2(x))\mathrm{d}x$.

(22) $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sec(x)\tan(x)\mathrm{d}x$.

(23) 假设我们知道了对某个函数 $f(t)$ 及某个常数 c 有

$$\cos(x)+1=\int_c^x f(t)\mathrm{d}t.$$

求 $f(t)$ 及 c.

(24) 假设我们已知对某个函数 $f(t)$ 及某个常数 c 有

$$x^6+8=\int_c^{x^2} f(t)\mathrm{d}t.$$

求 $f(t)$ 和 c.

在下列习题中用微积分基本定理求下列函数的导数. 注意,我们已使用 t 为积分变量.

(25) $h(x)=\int_1^x \sqrt{t^6-1}\mathrm{d}x$.

(26) $h(x)=\int_1^x \sin^2(t)\mathrm{d}t$.

(27) $h(x)=\int_x^1 \cos(t)\mathrm{d}t$.

(28) $h(x)=\int_1^{x^2} \frac{t^2}{t^7-\sin(t)}\mathrm{d}t$.

(29) $h(x)=\int_{\cos(x)}^{x^4} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.

(30) $h(x)=\int_{2x}^{10x} (3-\sqrt[3]{t})^2\mathrm{d}t$.

(31) 如果 f 是个连续函数, $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 为可微函数,则函数

$$h(x)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

的导数是

$$f(g_2(x))g'_2(x)-f(g_1(x))g'_1(x).$$

请验证.

15.2 不定积分

我们现在定义符号

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

为 f 的**一般反导数**(回想一下,一个函数的反导数 $F(x)$ 是满足 $f'(x)=f(x)$ 的函数),这里我们假定了反导数在某个区间有定义(这个区间可能会也可能不会明确提出). 如果 $F(x)$ 代表 $f(x)$ 的任意一个特定的反导数,那么,如果 C 是任意常数,则 $F(x)+C$ 也是一个反导数而且最一般的反导数将具有此种形式. 因此

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

并称 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 为**不定积分**. 当上下限 a 和 b 放进积分号时我们则得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

它被称做**定积分**.

例 15.6 不定积分的简单例子是

(a) $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$, (b) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(x) + C$,

(c) $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (如果 $n \neq -1$).

§15.2 的习题

计算下列不定积分. 用 CAS 微分此结果以检查你的答案.

(1) $\int \frac{x^2 - x - 1}{x}\mathrm{d}x$.

(2) $\int (3 - \sqrt[3]{x})^2\mathrm{d}x$.

(3) $\int (\sin(x) + 2\sec^2(x))\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$.

(5) $\int (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\,\mathrm{d}x$.

(6) $\int \sec(x)\tan(x)\,\mathrm{d}x$.

(7) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

(8) $\int \sqrt[3]{x^{-2}}\,\mathrm{d}x$.

(9) $\int \sqrt[4]{x^5}\,\mathrm{d}x$.

(10) $\int \sqrt{x}\left(x^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$.

(11) $\int \sqrt{x}\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$.

(12) $\int (1-x)^4 dx$.

(13) $\int e^{-2x} dx$.

(14) $\int \cos(5x) dx$.

(15) $\int \frac{2}{x} dx$.

(16) $\int \sinh(x) dx$.

(17) $\int (e^{3x} + x^2) dx$.

(18) $\int 2x\cos(x^2) dx$.

(19) $\int 3x^2 \sin(x^3) dx$.

(20) $\int 4x^3 e^{x^4} dx$.

15.3 用换元法积分

设 $F(x)$ 和 $u(x)$ 为可微函数. 回想由链规则有

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = f'(u(x))u'(x).$$

它立刻得出

$$\int f'(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

$$\int_a^b f'(u(x))u'(x)dx = F(u(b)) - F(u(a)) \tag{15.2}$$

例 15.7 计算 $\int (x^3 + 5x - 1)^{100} \cdot (3x^2 + 5) dx$.

我们在这里看到所给积分有形式

$$\int u(x)^{100} \cdot u'(x) dx,$$

其中 $u(x) = x^3 + 5x - 1$. 如果设 $f'(x) = x^{100}$(因而 $F(x) = x^{101}/101$),则积分取(15.2) 的形式. 我们看出

$$\begin{aligned}\int u(x)^{100} \cdot u'(x) dx &= F(u(x)) + C \\ &= \frac{u(x)^{101}}{101} + C \\ &= \frac{(x^3 + 5x - 1)^{101}}{101} + C.\end{aligned}$$

例 15.8 计算 $\int \cos(x^9 - e^x + 11) \cdot (9x^8 - e^x) dx$.

在对此积分审视一番时我们很快看出 $9x^8 - e^x$ 是 $u(x) = x^9 - e^x + 11$ 的导

数，面积分取形式

$$\int \cos(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

现令 $F(x) = \sin(x)$（因而$f'(x) = \cos(x)$）我们得到具形式(15.2) 的一个积分，因此

$$\int \cos(x^9 - \mathrm{e}^x + 11)\cdot(9x^8 - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \sin(x^9 - \mathrm{e}^x + 11) + C.$$

前两个例题形象地解释了换元法的本质所在. 为了使快速计算易于进行，我们使用下面的（非常聪明的）记号技巧. 当我们重写记号

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x)$$

为

$$\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$$

时，则可以重写方程(15.2) 为

$$\begin{aligned}\int f'(\underbrace{u(x)}_{u})\cdot\underbrace{u'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} &= \int f'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= F(u) + C.\end{aligned} \tag{15.3}$$

记住这个公式并返回到例 15.8 的不定积分，

$$\int \cos(x^9 - \mathrm{e}^x + 11)\cdot(9x^8 - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x.$$

如果令 $u = x^9 - \mathrm{e}^x + 11$ 以及 $\mathrm{d}u = (9x^8 - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}\int \cos(\underbrace{x^9 - \mathrm{e}^x + 11}_{u})\cdot\underbrace{(9x^8 - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} &= \int \cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \sin(u) + C \\ &= \sin(x^9 - \mathrm{e}^x + 11) + C.\end{aligned}$$

提问 你如何编制一个 CAS 程序，使它能够用换元法进行积分？

回答 在扫描一个像

$$\int \mathrm{e}^{3x^4+2x^3+3}\cdot(12x^3 + 6x^2)\,\mathrm{d}x$$

这样的积分时，CAS 必须努力造出一个替换. 有两个大体上容易看得出的可能性：

(1) $u = 3x^4 + 2x^3 + 3$，以及 $\mathrm{d}u = (12x^3 + 6x^2)\mathrm{d}x$，或者

(2) $u = 12x^3 + 6x^2$，以及 $\mathrm{d}u = (36x^2 + 12x)\mathrm{d}x$.

显然，第二个选择使我们不知所措（它很像是用错一把钥匙去开锁）. 第一个选择把此积分变换成了一种可处理的形式：

$$\int e^u du = e^u + C = e^{3x^4+2x^3+3} + C.$$

注　实际要在一个 CAS 上对这样的步骤编制程序是很不平凡的事，但它可由一种称为模型匹配（pattern matching）的方法做成.

例 15.9　计算$\int_0^1 \sin(\pi(x^8 - 2x)) \cdot (4x^7 - 1)dx$.

这里我们令 $u = \pi(x^8 - 2x)$，从而

$$du = \pi(8x^7 - 2)dx = 2\pi(4x^7 - 1)dx.$$

当 $x = 0$ 时，$u = 0$，当 $x = 1$ 时 $u = -\pi$. 此积分变换成

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin(\underbrace{\pi(x^8 - 2x)}_{u}) \cdot \underbrace{(4x^7 - 1)dx}_{du} &= \int_0^{-\pi} \sin(u)\frac{du}{2\pi} \\ &= \left.\frac{-\cos(u)}{2\pi}\right|_0^{-\pi} \\ &= \frac{-\cos(-\pi) - (-\cos(0))}{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

例 15.10　计算积分

$$\int_1^3 \frac{e^t}{(1 + e^t)^2}dt.$$

这里我们设 $u(t) = 1 + e^t$，而 $du = e^t dt$. 当 $t = 1$ 时 $u = 1 + e$，而当 $t = 3$ 时 $u = 1 + e^3$. 因此

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{e^t}{(1 + e^t)^2}dt &= \int_{1+e}^{1+e^3} \frac{du}{u^2} \\ &= -u^{-1}\Big|_{1+e}^{1+e^3} \\ &= \frac{-1}{1 + e^3} + \frac{1}{1 + e}.\end{aligned}$$

注　在这个特定的例子中，另外容易看出的替换也行得通. 如果我们设 $u = e^t$，则此积分变成

$$\int_e^{e^3} \frac{du}{(1 + u)^2},$$

而替换 $v = 1 + u, dv = du$ 将完成计算.

警示　换元法不是万能的工具，不是总可行的. 例如，如果我们考虑积分

$$\int(x^5+3x+2)(x^2+5x)\mathrm{d}x,$$

没有有用的替换映入眼帘. 然而它可以直接乘开来积分(或许并不那么灵巧)

$$(x^5+3x+2)(x^2+5x)=x^7+5x^6+3x^3+17x^2+10x,$$

然后一个一个的积分,

$$\int[x^7+5x^6+3x^3+17x^2+10x]\mathrm{d}x=\frac{x^8}{8}+\frac{5}{7}x^7+\frac{3}{4}x^4+\frac{17}{3}x^3+5x^2+C.$$

§15.3 的习题

计算下面的定积分和不定积分. 用 CAS 微分你所得到的反导数以检查你的答案.

(1) $\int(3x+4)^7\mathrm{d}x.$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2x)\mathrm{d}x.$

(3) $\int_{-1}^{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+18}\mathrm{d}x.$

(4) $\int_0^{\pi}x\sin(2x^2-3)\mathrm{d}x.$

(5) $\int x^2\sin(x^3)\mathrm{d}x.$

(6) $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$

(7) $\int x\mathrm{e}^{2x^2}\mathrm{d}x.$

(8) $\int\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$

(9) $\int_0^2\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x.$

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\sin x}\cos(x)\mathrm{d}x.$

(11) $\int x\sqrt{x-1}\mathrm{d}x.$

(12) $\int_{-2}^{-3}\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x.$

(13) $\int\frac{x^3-1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x.$

(14) $\int(1+\sqrt{x})^2\mathrm{d}x.$

(15) $\int\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

(16) $\int_3^4\frac{x}{\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x.$

(17) $\int\frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^7}\mathrm{d}x.$

(18) $\int(\sin(x))^3\mathrm{d}x.$

(19) $\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

(20) $\int x\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x.$

(21) $\int_0^1\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+2}}\mathrm{d}x.$

(22) $\int\frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2}\mathrm{d}x.$

(23) $\int x\sqrt{x-4}\mathrm{d}x.$

(24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{(\sin(x))^2}\mathrm{d}x.$

(25) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(x)\mathrm{d}x.$

(26) $\int(x^3+x-1)^2x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$

(27) $\int_1^3 \frac{(1+\sqrt{x})^6}{\sqrt{x}} dx$.

(28) $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1} dx$.

(29) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2} dx$.

(30) $\int e^x \sin(e^x) dx$.

(31) $\int e^x \cos(e^x)\cos(\sin(e^2)) dx$.

(32) $\int \sec^2(5x) dx$.

(33) $\int (x^2+\frac{1}{3}) \cdot \cos(1+x^3+x) dx$.

(34) $\int_0^1 \sinh(2x) dx$.

(35) $\int \cosh(x)\sinh^2(x) dx$.

15.4　分部积分

设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 为区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的可微函数. 乘积规则告诉我们

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)).$$

对其两边积分,得到

$$\int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) + C,$$

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

上面的公式通常写成一个紧凑的形式

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v, \tag{15.4}$$

它有简单易记的好处,称为**分部积分**.

例 15.11　计算 $\int xe^{-2x} dx$.

这里我们设 $u = x, v' = e^{-2x}$. 于是 $u' = 1$ 而 $v = \frac{-e^{-2x}}{2}$. 它推出

$$\int \underset{u}{x} \underset{v'}{e^{-2x}} dx = \underset{u}{x} \underbrace{\frac{-e^{-2x}}{2}}_{v} - \int \underset{u'}{1} \cdot \frac{-e^{-2x}}{2} dx$$

$$= -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{4} + C.$$

注　你应该用证明

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{4} + C\right) = xe^{-2x}$$

的方法来检验你的结果.

这个问题非常具启发性. 一旦你在对两个函数的乘积进行积分,尝试一下,分部积分法是值得的(常常是第一次尝试并不成功但第二次就行了). 正如我们在下一个例子中将看到的,即便在此方法似乎失效时,就是说留给你的是另一个并非显然可算的积分时,分部积分法可对第二个积分施行从而完成了计算.

例 15.12 计算$\int x^2\sin(2x)\,dx$.

如果设$u = x^2, v' = \sin(2x)$,则$u' = 2x, v = -\cos(2x)/2$. 那么分部积分给出了

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\sin(2x)}_{v'}dx = \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{(-\cos(2x)/2)}_{v} - \int\underbrace{(2x)}_{u'}\cdot\underbrace{(-\cos(2x)/2)}_{v}dx$$

$$= \frac{-x^2\cos(2x)}{2} + \int x\cos(2x)\,dx.$$

到了这步也不像完成了很多工作,但是再看看. 我们原来的积分含有x^2,现在已转变为一个相似的积分但只含有x的较低次幂(即x的一次幂). 这提醒我们,以同样的方式进行第二遍,便会达到目的:

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos(2x)}_{v'}dx = \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{(\sin(2x)/2)}_{v} - \int\underbrace{(1)}_{u'}\cdot\underbrace{(\sin(2x)/2)}_{v}dx$$

$$= \frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + C,$$

因此

$$\int x^2\sin(2x)\,dx = \frac{-x^2\cos(2x)}{2} + \frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + C.$$

例 15.13 计算$\int x\ln(x)\,dx$.

这时如果我们选$u = x$,以及$v' = \ln(x)$真的会什么也做不成了(见例15.4). 但是如果我们试用$u = \ln(x), v' = x$,则$u' = \frac{1}{x}, v = x^2/2$,并且

$$\int \underbrace{x}_{v'}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{u}dx = \underbrace{\ln(x)}_{u}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} - \int\underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}dx$$

$$= \ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x}{2}dx$$

$$= \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

例 15.14 计算$\int \ln(x)\mathrm{d}x$.

初看起来，此积分并不是以乘积形式出现的. 但有一个吸引人的技巧让我们能使用分部积分：设 $v' = 1$ 而 $u = \ln(x)$. 于是 $u' = 1/x, v = x$，从而

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} \mathrm{d}x = \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{x}_{v}\mathrm{d}x$$

$$= x\ln(x) - x + C.$$

当然，分部积分可用于计算定积分，这正是我们在下面例题中将看到的.

例 15.15 计算$\int_1^4 x^2(\ln(x) + 2)\mathrm{d}x$.

凭经验，我们设 $u = (\ln(x) + 2), v' = x^2$，从而 $u' = 1/x, v = x^3/3$. 并且我们分部积分：

$$\int_1^4 \underbrace{x^2}_{v'} \underbrace{(\ln(x) + 2)}_{u}\mathrm{d}x = \underbrace{(\ln(x) + 2)}_{u} \underbrace{x^2}_{v} \Big|_1^4 - \int_1^4 \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v}\mathrm{d}x$$

$$= (\ln(4) + 2) \cdot 16 - 2 - \int_1^4 \frac{x^2}{3}\mathrm{d}x$$

$$= 16\ln(4) + 30 - \frac{4^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

最后一个例子是分部积分法的精妙展示.

例 15.16 计算$\int \cos x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

如果设 $u = \cos x, v' = \mathrm{e}^{-x}$，我们便把此积分变换成了一个相类似的积分，只不过用 sin 代替了 cos. 这暗示第二次分部积分会产生又一个有同样结构的积分但包含了 cos.

第一次分部积分

$$\int \underbrace{\cos x}_{u} \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{v'}\mathrm{d}x = \underbrace{\cos x}_{u} \cdot \underbrace{(-\mathrm{e}^{-x})}_{v} - \int \underbrace{(-\sin x)}_{u'} \cdot \underbrace{(-\mathrm{e}^{-x})}_{v}\mathrm{d}x.$$

第二次分部积分

$$\int \underbrace{\sin x}_{u} \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{v'}\mathrm{d}x = \underbrace{\sin x}_{u} \underbrace{(-\mathrm{e}^{-x})}_{v} - \int \underbrace{\cos x}_{u'} \underbrace{(-\mathrm{e}^{-x})}_{v}\mathrm{d}x$$

$$= -\sin x\mathrm{e}^{-x} + \int \cos x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

结合前两个公式我们得到了令人瞩目的等式

$$\int \cos x e^{-x} dx = (-\cos x + \sin x)e^{-x} - \int \cos x e^{-x} dx,$$

它可重写为

$$2\int \cos x e^{-x} dx = (-\cos x + \sin x)e^{-x} + C$$

故而

$$\int \cos x e^{-x} dx = \frac{1}{2}(-\cos(x) + \sin(x))e^{-x} + C.$$

§15.4 的习题

用分部积分法计算下列不定积分. 用 CAS 微分这些结果以检验你的答案. 在做分部积分前某些问题可能需要做一个预先的换元.

(1) $\int x\cos(x)dx$.

(2) $\int (2x+1)e^{-5x}dx$.

(3) $\int x^2 e^{3x}dx$.

(4) $\int x\ln(2x^3)dx$.

(5) $\int (\ln(x))^2 dx$.

(6) $\int \cos(\sqrt{x})dx$.

(7) $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

(8) $\int x\sinh(x)dx$.

(9) $\int (\sin(x))^2 dx$.

(10) $\int x^2\ln(x)dx$.

(11) $\int x\cosh(5x)dx$.

(12) $\int \cos(4x)\sin(2x)dx$.

(13) $\int (5x-3)\ln(3x)dx$.

(14) $\int x^9 e^{x^5}dx$.

(15) $\int x^{21}\cos(2x^{11})dx$.

(16) 证明对所有 $n \neq 0$,

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx.$$

(17) 证明对所有 $n \geqslant 1$,

$$\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^n dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^{n-2} dx$$

对 $n > 2$ 的奇整数 n, 推导出沃利斯公式

$$\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^n dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}.$$

15.5 微分方程的基本原理

设 $y = f(x)$, $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)\cdots$ 为一未知函数 $y = f(x)$ 的依次的各阶导数. 我们将 $y, y', y''\cdots$ 看作是未知变量.

定义 一个微分方程是一个包含导数 $y, y', y'', \cdots$ 和 x 的一个方程式.

例 15.17 方程

$$y' - 2x = 0, y'' - y' - 3x^2 - 6x = 0, y'' - (4x^2 + x)y = 0$$

都是微分方程.

定义 一个微分方程的**解**是一个函数 $f(x)$（它多次可微），它具有这样的性质，即当替换 $y = f(x), y' = f'(x), y'' = f''(x)$ 等等时，此微分方程成为恒等式.

例 15.18 解微分方程 $y' - 2x = 0$.

要解此微分方程我们需要一个函数 $y = f(x)$ 使得 $f'(x) = 2x$. 在此等式两边关于 x 取积分，我们得到

$$\int f'(x)\,dx = \int 2x\,dx,$$

$$f(x) = x^2 + C,$$

其中 C 为一任意常数. 为检验 $y = x^2 + C$ 是解，我们只要以 $f(x) = x^2 + C$ 替换微分方程中的 y：

$$\underbrace{(x^2 + C)'}_{y'} - 2x = 2x - 2x = 0,$$

从而我们事实上得到了一个恒等式.

例 15.19 验证函数 $y = e^{x^2}$ 是微分方程 $y'' - (4x^2 + 2)y = 0$ 的一个解.

在此微分方程中以 e^{x^2} 替换 y 产生了想要的恒等式

$$y'' - (4x^2 + 2)y = \underbrace{(4x^2 + 2)e^{x^2}}_{y''} - (4x^2 + 2)\underbrace{e^{x^2}}_{y}$$

$$= 0.$$

我们已经看到，甚至当微分方程似乎是具简单形式时（像例 15.18 中 $y' - 2x = 0$ 那样），也有无穷多个解. 事实上，$y = x^2 + C$ 对任意常数 C 都是一个解. 要确定 C 的值，必须给出一点附加的信息. 在此例中，$y(0) = C$；因此如果知道函数在 O 点的值我们便能得到此微分方程的一个唯一的解.

定义 微分方程的一组**初始条件**是一组解的导数的已知值：

$$y(0), y'(0), y''(0), \cdots.$$

可以指出，一般来说如果一个微分方程有一个解，则事实上它就有无穷多个解，除非给出了某些初始条件.

例 15.20 解微分方程

$$y' - 3(x^2 + 1) = 0.$$

初始条件为 $y(0) = 2$.

我们要找寻一个函数 $y = f(x)$ 使得 $f(0) = 2$ 且

$$f'(x) = 3x^2 + 3.$$

对此方程两边取积分时我们看到

$$f(x) = x^3 + 3x + C.$$

我们可以通过计算函数f在$x = 0$的值确定常数C. 因此我们知道了$f(0) = 2 = C$, 而我们得到的结论是此微分方程的解是$y = x^3 + 3x + 2$.

没有解任意微分方程的已知方法,而且求解已知微分方程的算法问题是极其困难的. 但是有非常大量的技术已经发展起来,以解决特殊类型的微分方程. 作为此学科中一个基本方法的例示,我们要考虑**分离变量**方法.

考虑具有形式

$$y' - p(x)q(y) = 0$$

的微分方程,其中$p(x)$是只涉及x的任意函数,而$q(y)$是只涉及y的任意函数. 假设$y = f(x)$是此微分方程的一个解. 立即推出$f'(x) = p(x)q(f(x))$,或者

$$\frac{f'(x)}{q(f(x))} = p(x).$$

积分此方程的两边则产生了

$$\int \frac{f'(x)}{q(f(x))}\mathrm{d}x = \int p(x)\mathrm{d}x \tag{15.5}$$

暂时集中注意于左端的积分,这时有一个顺手的自然换元:当我们设$y = f(x)$, $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$,从而(15.5)成为

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{q(y)} = \int p(x)\mathrm{d}x. \tag{15.6}$$

如果我们能计算出(15.6)的积分,就解出了我们的微分方程. 我们将这个讨论概括于下面的算法中.

分离变量算法

步骤 1 重新写微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - p(x)q(x) = 0$为形式$\frac{\mathrm{d}y}{q(y)} = p(x)\mathrm{d}x$.

步骤 2 同时积分方程两边:$\int \frac{\mathrm{d}y}{q(y)} = \int p(x)\mathrm{d}x$.

步骤 3 解出y.

例 15.21 解方程$y' - 6xy = 0$.

步骤 1 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = 6x\mathrm{d}x$.

步骤 2 $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln(y) = \int 6x\mathrm{d}x = 3x^2 + C$.

步骤 3 $y = \mathrm{e}^{3x^2+C}$.

例 15.22　以初始条件 $y(0) = 2$ 解微分方程 $y' - (3x^2+3)y^2 = 0$.

步骤 1　$\dfrac{dy}{y^2} = (3x^2+3)dx$.

步骤 2　$\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} = \int (3x^2+3)dx = x^3+3x+C$.

步骤 3　$y = \dfrac{-1}{x^3+3x+C}$.

初始条件 $y(0) = 2$，意味着 $C = -\dfrac{1}{2}$.

§15.5 的习题

解下列微分方程. 给出通解(指带任意常数的解). 如果已知了初始条件，确定 C 值. 用你的 CAS 将你的答案代回此微分方程进行检验.

(1) $y' = y^2 + 2y + 1$.

(2) $y' = 5y + 2$, $(y(0) = 1)$.

(3) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + 2x + x^4$.

(4) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{x^3}{2} = 1$, $(y(0) = 1)$.

(5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{y}$.

(6) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{x}{y+2}}$, $(y(0) = 2)$.

(7) $\dfrac{dy}{dx} = x^2y(x^3+3)^{\frac{1}{4}}$.

(8) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x\cos(3x)}{y^2}$, $(y(0) = 1)$.

(9) $\dfrac{dy}{dx} + (x^3+1)\dfrac{\sqrt{2y^2+1}}{y} = 0$.

(10) $\dfrac{dy}{dx} - 3x^2y = 0$, $(y(0) = 3)$.

(11) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{y+3}$.

(12) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln(x)}{y^2}$, $(y(1) = 8)$.

15.6　指数式增长和指数式衰减

设 $f(t)$ 表示一个时间 t 的函数. 陈述：

$$f(t)\text{ 以与 }f(t)\text{ 成比例的比率变化} \tag{15.7}$$

表明存在一个常数 K(称为比例常数) 使得

$$f'(t) = Kf(t).$$

满足(15.7) 的函数经常出现在科学、工程和经济学中. 如果我们记 $y = f(t)$，则(15.7) 导出了微分方程 $y' = Ky$，其解为 $y = Ce^{Kt}$. 注意到常数 C 可令 $t = 0$ 得到，因为 $y(0) = C$. 重要之处在于了解到，一旦遇到陈述(15.7) 则它可以表示

为微分方程.

例 15.23(指数式增长) 在某国所作的人口调查表明人口数为 3 百万. 一年后发现人口数为 3.3 百万. 假定人口是以其本身大小成比例的比率增长的,求在原来的人口调查 5 年后的人口数.

设 $p(t)$ 代表在那次人口调查后七年的人口数. 于是 $p(0)=3, p(1)=3.3$,单位为百万人. 假设人口数以与其大小成比例的比率增长导出了微分方程.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=Kp,$$

其中 K 为某个常数. 解此微分方程,我们得到

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=\int K\mathrm{d}t$$

$$\ln(p(t))=Kt+C,$$

$$p(t)=C_0\mathrm{e}^{Kt},$$

其中 $C_0=\mathrm{e}^C$. 条件 $p(0)=3$ 表明 $C_0=3$,因而 $p(t)=3\mathrm{e}^{Kt}$. 要求出 K 我们用假定条件 $p(1)=3.3$:

$$3.3=3\mathrm{e}^K$$

$$\mathrm{e}^K=\frac{3.3}{3}=1.1$$

$$K=\ln(1.1)$$

我们推断出 $p(t)=3\mathrm{e}^{\ln(1.1)t}=3\times(1.1)^t$ 而 $p(5)\approx 4.8315$ 百万人.

例 15.24(指数式衰减) 一只艾丽丝漫游奇境的兔子原来为 3 英尺高而在 10 秒钟内缩成了 2 英尺高. 假设这只兔子以与其高度成比例的比率收缩,那么它变为 6 英寸高要多长时间?

设 $h(t)$ 为这只兔子 t 秒后的高度. 于是 $h(0)=3, h(10)=2$. 另外我们得知对某个常数 K 有 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=Kh$. 像前面那样解出微分方程得 $h(t)=C_0\mathrm{e}^{Kt}$,其中 $C_0=h(0)=3$,因而 $h(t)=3\mathrm{e}^{Kt}$. 为了找到 K,我们用假定条件 $h(10)=3\mathrm{e}^{10K}=2$,得到

$$\mathrm{e}^{10K}=\frac{2}{3},$$

$$10K=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$K=\frac{1}{10}\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

我们的结论是 $h(t) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{t/10}$. 要知道此兔花多少时间缩成了 6 英寸(即 $\frac{1}{2}$ 英尺) 高,我们必须解方程

$$\frac{1}{2} = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{t/10}.$$

方程两边除以 3 并取自然对数,产生了

$$\ln\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{t}{10}\ln\left(\frac{2}{3}\right), \text{即 } t = 10 \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 44.19 \text{ 秒}.$$

推广了(15.7) 的一个陈述是:

$$f(t) \text{ 以与 } f(t) - b \text{ 成比例的一个比率变化} \tag{15.8}$$

其中 b 的一常数. 这导致了微分方程

$$f'(t) = K(f(t) - b),$$

其中 K 是比例常数. 令 $y = f(t)$,我们的新微分方程具有形式

$$y' = Ky - Kb,$$

其解由

$$y = Ce^{Kt} + b$$

给出,其中 C 为常数(它在指定了初始条件下可以被确定).

例 15.25　一间茶馆的室温为 70 华氏度. 侍者倒了一杯(几乎) 沸点的热茶. 假设茶冷却的速率与茶的温度和环境温度之差成比例. 进一步假定在 1 分钟后茶冷却到了 140 华氏 度. 确定在任意指定时间上此茶的温度.

设 $T(t)$ 代表这杯茶在时间 t 的温度. 由假设条件,

$$T'(t) = K(T(t) - 70)$$

其中 K 为一个常数. 因此 $T(t) = Ce^{Kt} + 70$. 由于 $T(0) = 210$, 我们知道了 $C = 140$. 进而,因为 $T(1) = 140$,我们有

$$140 = 140e^{K} + 70,$$

即 $K = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$. 我们最后有 $T(t) = 140 \times 2^{-t} + 70$.

§15.6 的习题

(1) 人口调查表明某国有人口 1000 万. 15 年后加倍到 2000 万. 假设人口数以与其人口数成比例的比率增加. 人口再次加倍到 4000 万要花多长时间?这个国家有 10 亿人要多长时间?

(2) 培养中的细菌总量以与细菌显现的总量成比例的比率增加. 假定这次培养从10 000细菌开始并在2小时后增加到30 000, 12小时后种群数为多少?

(3) 放射性碳的半衰期是5568年. 这是此物质的总量衰减为它原来大小的一半所需要的时间数. 同时也知道衰减率在任何已知时间显示的量成比例.

在一处考古点发现了一些放射性碳,并已衰减到它原来大小的10%. 假设放射性碳的样本是在考古点形成时就已被置于其中;试决定此考古点的年代.

(4) 一家得克萨斯石油公司设计了一种油泵,它可连续地由一口井内以留在井中的油量成比例的比率泵出油来. 开始时,此井含有3百万加仑而5年后尚存2.5百万加仑油.

(a) 从此井中抽出2百万加仑油需要多长时间?

(b) 什么时候只有$\frac{1}{2}$百万加仑油残存于井中?此时油以什么速率被抽出?

(5) 牛顿的冷却定律说,一个物体冷却的速率与此物体的温度$T(t)$和环绕它周围介质的温度T_a之差成比例.

(a) 写出并解出$T(t)$的微分方程.

(b) 一个饭店内的温度为70°F,而侍者倒出一杯沸水茶(212°F). 在1分钟内此茶冷却至160°F. 此杯茶达到120°F时要花多少时间?

(6) 一个软件制造商想要找到一个数学模型以确定普通人掌握他的新软件需要多长时间. 他们发现学会的速率与$100 - L(t)$成比例,其中$L(t)$代表在时间t所学会的程序的百分比(0到100%). 那就是说,在一开始时学习很快而当$L(t)$趋向于100%时则变得很小了.

(a) 写出并解$L(t)$的微分方程.

(b) 假定一开始这位普通人对此软件一无所知并在3小时后掌握了它的25%. 掌握90%要花多少时间?

(c) 如果此新软件被一位以前买过此公司其他软件产品的用户买去,发现新软件的30%是过去已经知道的. 假定学会50%时花了2小时,问学会90%要花多少时间.

(d) 解释一下,为什么此数学模型对非常大的t失效.

第十五章的附加习题

(1) 设$f(x) = \frac{1}{2} - \exp(-x^2)$及$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(a) F在何处增加,何时减少?

(b) F在何处凹向上,何处凹向下?

(c) 何处是F的判别点?用你的CAS检验.

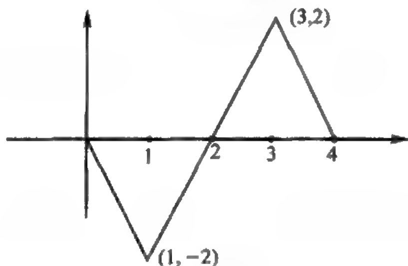
(2) 证明$F(x) = \begin{cases} x, & 如果\ x > 0 \\ -x, & 如果\ x < 0 \end{cases}$和$G(x) = \begin{cases} x+2, & 如果\ x > 0 \\ -x+4, & 如果\ x < 0 \end{cases}$

都是函数$f(x) = \begin{cases} 1, & 如果\ x > 0 \\ -1, & 如果\ x < 0 \end{cases}$的反导数,但是$G(x) \neq F(x)$. 请解释.

(3) 解初始值问题：$y' - x\exp(y) = 2\exp(y), y(0) = 1$.

(4) 求在 xy - 平面上的一条曲线，它通过点 $(1,1)$ 并且它在点 (x,y) 的法线斜率为 $-\frac{2y}{3x^2}$.

(5) 证明 $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$. 提示：用归纳法.



假设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，其中 $f(t)$ 如右图.

回答下列问题.

(6) 计算 $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$ 和 $F(4)$.

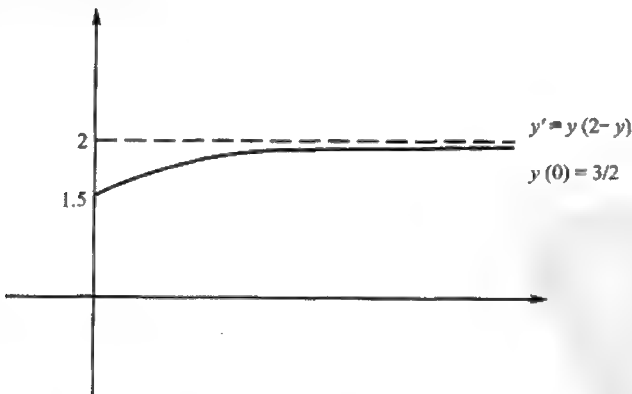
(7) 用基本定理求 $F(x)$ 的判别点.

(8) F 在何处增大，何处减少？

(9) 你能写出 F 的一个代数表达式吗？

解一个微分方程如果不是不可能的话也经常是非常困难的. 但是通过分析微分方程本身我们或许能够得到可能的解的一个非常好的图形. 例如考虑方程 $y' = y(2-y), y(0) = 3/2$. 于是 $y'(0) = y(0)(2-y(0)) = 3/4 > 0$，故在 $x = 0$ 附近 $y(x)$ 增加. 由于 $y' = y(2-y)$ 故 $y < 2$ 时 $y' > 0$，那么 $y(x)$ 在 $3/2 \leqslant y < 2$ 是增加的. y 能够大于 2 吗？由于 $y = 2$ 时 $y' = 0$，而对 $y < 2$（y 在 2 附近），$y' > 0$，而且 $y > 2$ 时 $y' < 0$，因此这是不可能的；由一阶导数判别法，$y = 2$ 必定会是一个极大值.

取导数我们得到 $y'' = y(2-y)(2-2y)$. 因此对 $3/2 \leqslant y < 2$ 有 $y'' < 0$，从而图像是凹向下的. 现在我们可勾画出此图：



对于下面的微分方程，勾画出对应于所给两个初始条件中每一个的可能解.

(10) $y' = (y-2)(y-4), y(0) = 1, y(0) = 6$.

(11) $y' = -y(1-y), y(0) = -2, y(0)1/4$.

(12) $y' = y(y-2)(y-5)(y+3), y(0) = 1, y(0) = 3$.

第十六章　积分的基本应用

16.1　函数的平均值

给出一组数值(例如考试分数),譬如

$$100,87,92,53,67,66,42,92,85,73,76,$$

我们可以容易地(使用 CAS) 算出平均值

$$\frac{1}{11}(100+87+92+53+67+66+42+92+85+73+76)\approx 75.73.$$

尽管它简单,但从统计的观点看,平均值是个至关重要的量. 一组数的平均值的自然推广是在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上一个连续函数 $f(x)$ 的平均值的概念. 一个试图计算此平均值的方式是 N 个等间隔的点

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b,$$

并且计算平均值

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n).$$

由假定,这些点由下面给出:

$$x_1 = a+\frac{b-a}{N}, x_2 = a+2\frac{b-a}{N}, \cdots, x_N = a+N\cdot\frac{b-a}{N} = b,$$

从而平均值由

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x_n) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f\left(a+n\frac{b-a}{N}\right). \tag{16.1}$$

给出. 当我们让 $N\to\infty$ 的上面的和数(16.1)产生出对函数 $f(x)$ 的平均值的越来越好的估值. 当我们用(16.1)与作为和的极限的积分定义(见 §13.3)作比较时,我们便引导向定义 $f(x)$(对 $a\leqslant x\leqslant b$)的平均值为

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

例 16.1　$y=x^2$ 在 $2\leqslant x\leqslant 5$ 上的平均值是什么?

此积分的平均值是积分

$$\frac{1}{5-2}\int_2^5 x^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_2^5 = \frac{117}{9} = 13.$$

例 16.2　$y=\cos(\pi x)$ 对 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$ 的平均值是什么?

这里的平均值是

$$\frac{1}{\frac{1}{3}-0}\int_0^{\frac{1}{3}}\cos(\pi x)\,dx = \frac{3}{\pi}\sin(\pi x)\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

例 16.3　计 e^x 对 $1\leqslant x\leqslant 21$ 的平均值.

这时的平均值是(借助于我们的 CAS)

$$\frac{1}{21-1}\int_1^{21}e^x\,dx = \frac{1}{20}(e^{21}-e)\approx 65\ 940\ 786.59.$$

§16.1 的习题

计算下列连续函数在指出的区间上的平均值.

(1) $f(x)=x^3, 10\leqslant x\leqslant 15.$

(2) $f(x)=\sqrt{x}, 100\leqslant x\leqslant 121.$

(3) $f(x)=\cos(x), -\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}.$

(4) $f(x)=e^x, 2\leqslant x\leqslant 7.$

(5) $f(x)=xe^{-x^2}. 1\leqslant x\leqslant 3.$

(6) $f(x)=x\sin^2(\pi x), 0\leqslant x\leqslant 2.$

(7) $f(x)=\frac{1}{x}, e\leqslant x\leqslant e^2.$

(8) $f(x)=10^x, 1\leqslant x\leqslant 5.$

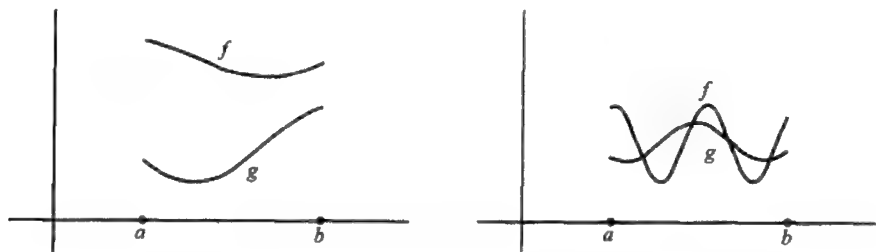
(9) $f(x)=\sin(x), 0\leqslant x\leqslant\pi.$

(10) $f(x)=x^{\frac{1}{4}}, 100\leqslant x\leqslant 200.$

16.2　计算面积

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的可积函数. 有两种可能的场景. 或者

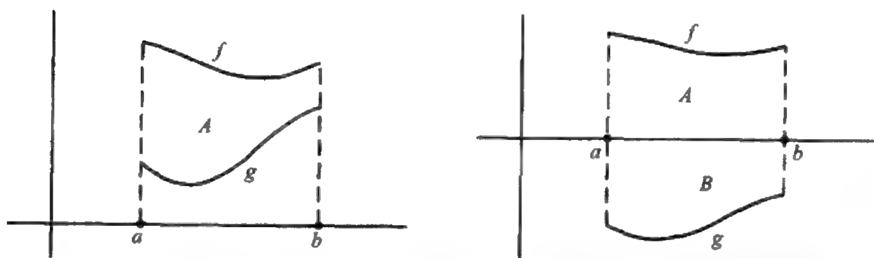
它们不相交(互相交叉),这时一条图像在另一条之上,譬如 $f(x) \geqslant g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$;或者它们相互交于一个或多个点.



在第一种情形,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 $y=f(x)$ 下方的面积而 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 则是 $y=g(x)$ 下方的面积.

因此在 f 和 g 图像之间的区域 A 的面积由相减给出:

$$\text{面积}(A) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$



注　即便一条或两条曲线位于 x 轴下面,此公式在稍作修改后仍然适用.例如,在下面的情形.

$$\text{面积}(A) + \text{面积}(B) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

这是因为

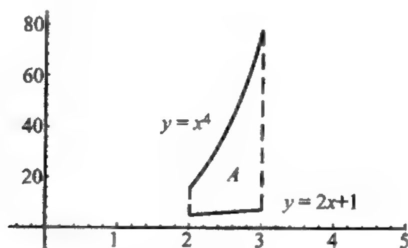
$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = -\text{面积}(B).$$

如果我们插进绝对值的符号于积分两边,则我们得到对任意两个不交函数都有效的公式(不管哪一个函数在哪一个之下或者是否它们都在 x 轴下方)

$$\left|\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\right| \qquad (16.2)$$

例 16.4　求在曲线 $y = x^4$ 和 $y = 2x + 1$ 之间的区域当 $2 \leqslant x \leqslant 3$ 时的面积.

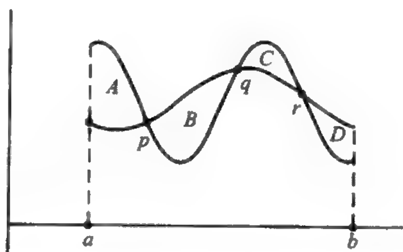
首先注意 $x^4 > 2x + 1$ 在 $2 \leqslant x \leqslant 3$ 时成立,这在下图中能够看出.



于是面积 A 可用我们的公式计算:

$$\text{面积}(A) = \int_2^3 (x^4 - (2x + 1))\,dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^2 - x\right)\Bigg|_2^3 = \frac{181}{5}.$$

现在转向我们的第二个场景,即所讨论的曲线相互相交的情形(可能交成许多点).



在这种情形中曲线之间的面积直接由更小的一些面积的和给出,在上图中有描画,即

$$\text{面积}(A) + \text{面积}(B) + \text{面积}(C) + \text{面积}(D).$$

为了高效率地计算此面积,我们首先求出这些曲线的交点,在目前的情形即 p, q 和 r,而后用我们已导出的在完全不相交情形下的公式计算各个面积. 这等于计算

$$\text{面积}(A) = \left|\int_a^p (f(x) - g(x))\,dx\right|,$$

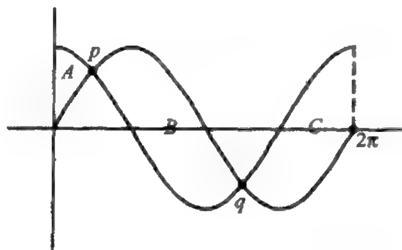
$$\text{面积}(B) = \left|\int_p^q (f(x) - g(x))\,dx\right|, \tag{16.3}$$

$$面积(C) = \left|\int_q^r (f(x) - g(x))\,dx\right|,$$

$$面积(D) = \left|\int_r^b (f(x) - g(x))\,dx\right|.$$

注意,我们将绝对值符号包住了我们的积分,从而避免了哪条曲线在上的问题.

例 16.5 求在曲线 $y = \sin(x)$ 和 $y = \cos(x)$ 之间在区域 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 之上的面积.



如果在我们的 CAS 上同时画出这两条曲线,则将得到右图. 这两条曲线交于两个点 p,q,有三个要分开计算的区域. 点 p 和 q 对应于方程

$$\sin(x) = \cos(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$$

的解,因而 $p = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $q = \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

于是我们有

$$面积(A) = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(x) - \cos(x))\,dx\right|$$

$$= \left|-\cos(x) - \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right| = \sqrt{2} - 1,$$

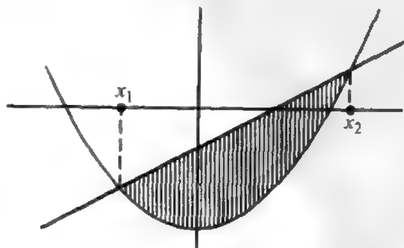
$$面积(B) = \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin(x) - \cos(x))\,dx\right| = 2\sqrt{2}$$

$$面积(C) = \left|\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\sin(x) - \cos(x))\,dx\right| = \sqrt{2} + 1$$

于是所考虑的面积由取和得到:

$$面积(A) + 面积(B) + 面积(C) = 4\sqrt{2}.$$

例 16.6 曲线 $y = x^2 - 3$ 和直线 $y = x - 1$ 恰好在两个点相交,我们记其为 x_1 和 x_2. 求这两条曲线之间在 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 时的那块区域的面积.



首先需要求出 x_1 和 x_2. 为此我们解方程 $x^2 - 3 = x - 1$,即

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

它告诉我们 $x_1 = -1$ 而 $x_2 = 2$. 想要的两条曲线之间的面积由下面积分给出:

$$\int_{-1}^{2}[(x-1)-(x^2-3)]\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{x^3}{3} + 3x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

如果不知道直线 $y = x - 1$ 是在上方,我们也能有计算

$$\left|\int_{-1}^{2}[(x^2-3)-(x-1)]\mathrm{d}x\right|,$$

这是因为绝对值的出现保证我们得出相同的答案.

卡瓦列里原理(Cavalieri's Principle):设 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 为区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的可微函数. 由定义

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x), & \text{如果} f(x) \geqslant g(x), \\ g(x) - f(x), & \text{如果} g(x) \geqslant f(x), \end{cases}$$

而且我们明白,不管这些曲线相交于何处(或者它们相交多少次). 这两条曲线之间的面积由公式

$$\text{面积} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$$

给出. 注意此公式与(16.2) 之间的关键差别. 这里的绝对值是在积分里面(它确实严重地影响到我们对其积分的函数),而在(16.2) 中绝对值在外面,它只在函数不相交时有效. 这个原理容易验证,请读者去做.

§16.2 的习题

在下列习题中用你的 CAS 在指定区间上画出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$. 计算 f 和 g 的图像之间区域的面积.

(1) $f(x) = x^2 + 3, g(x) = 1 - x, (0 \leqslant x \leqslant 1)$.

(2) $f(x) = x^2 + 3, g(x) = 1 - x, (0 \leqslant x \leqslant 2)$.

(3) $f(x) = x^3 + 2x + 1, g(x) = x^2 + 2x + 1, (-1 \leqslant x \leqslant 2)$.

(4) $f(x) = x^3 - x, g(x) = 2 - 2x^2, (-1 \leqslant x \leqslant 2)$.

(5) $f(x) = x^4, g(x) = 6x^2 - 4, (-3 \leqslant x \leqslant 3)$.

(6) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}, g(x) = \frac{1}{x}, (2 \leqslant x \leqslant 10)$.

(7) $f(x) = \frac{3}{4}x\sqrt{x^2+1}, g(x) = 3 - x, (0 \leqslant x \leqslant 2)$.

(8) $f(x) = \cos(x), g(x) = \sin(x), (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

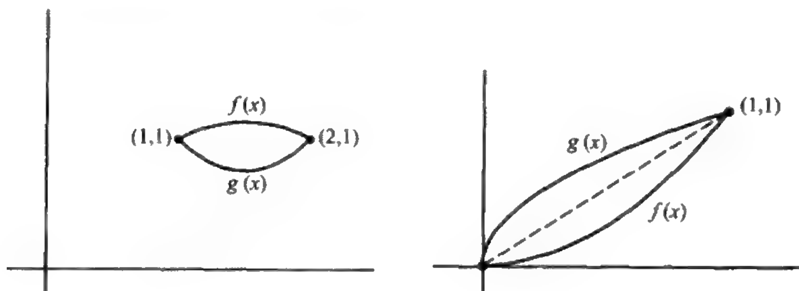
(9) $f(x) = \cos(\pi x), g(x) = 1 - 2x, (-1 \leqslant x \leqslant 2)$.

(10) $f(x) = \tan(\pi x), g(x) = x^2, \left(-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\right)$.

(11) 给一个几何的论述来解释为什么

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,dx.$$

(12) 求下左图的橄榄球形状的区域的面积,其中 $f(x)=ax^2+bx$,而 $g(x)=x^2+cx+d$,a,b,c,d 是某些常数. 提示:首先算出常数 a,b,c,d.

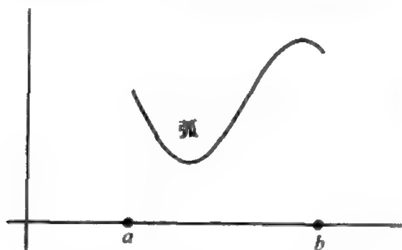


(13) 用你的 CAS 画出三条曲线 $y=1$,$y=(1+4x)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$. 你会发现正好有三个交点,它们在第一象限构成了一个三角形状的区域. 求此区域的面积.

(14) 函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=\sqrt{x}$ 在 $x\geqslant 0$ 互逆. 它们的曲线在 $x=0$ 和 $x=1$ 相交. 证明(0,0) 和(1,1) 之间的虚线平分这两条曲线之间的面积(见上右图).

16.3 计算弧长

设 $y=f(x)$ 为在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上具连续导数的函数.

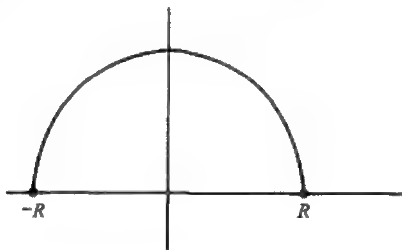


如果我们想像 $y=f(x)$ 的图像的这一部分是一段弦线,那么把它拉直后我们便能测量它的长度. 称此长度为**弧长**. 对于弧长有一个漂亮的公式,它由下面的积分给出:

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x \tag{16.4}$$

例 16.7 计算半径为 R 的圆的周长.

考虑半径 R 的一个圆. 在圆上的点 (x,y) 是方程 $x^2+y^2=R^2$ 的解. 函数 $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ 对 $-R\leqslant x\leqslant R$ 有确切定义,而它的图像是半径为 R 的半圆.



我们的公式规定弧长由下面的积分给出:

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R}\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x &= \int_{-R}^{R}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\right)^2}\mathrm{d}x\\ &= \int_{-R}^{R}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\\ &= \int_{-R}^{R}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这个积分可以用换元 $x=R\sin(u)$, $\mathrm{d}x=R\cos(u)\mathrm{d}u$ 计算,而 $-R\leqslant x\leqslant R$ 成为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$. 于是此半圆的弧长可计算于后:

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-R^2\sin^2(u)}}\cdot R\cos(u)\mathrm{d}u\\ &= R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{1-(\sin(u))^2}}\cdot\cos(u)\mathrm{d}u\\ &= R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}u\\ &= \pi R.\end{aligned}$$

注 从技术上说,上面的积分是**反常的**. 对进一步的细节,见 §17.5.

例 16.8 求曲线 $y=2x^{3/2}-5$ 对 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的弧长.

这里 $f(x)=2x^{3/2}-5$,因而 $f'(x)=3x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x)^2=9x$. 因此弧长由

$$\int_0^1 \sqrt{1+9x}\,dx$$

给出. 利用替换 $u = 1 + 9x, du = 9dx$, 我们计算积分

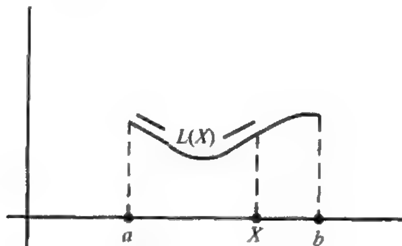
$$\int_0^1 \sqrt{1+9x}\,dx = \int_1^{10} \sqrt{u}\,\frac{du}{9},$$

$$= \frac{2}{27}u^{3/2}\bigg|_1^{10}$$

$$= \frac{2}{27}(10^{3/2} - 1).$$

注 在前面的两个例题中我们非常幸运,能准确地算出积分. 在实践中这是很罕见的,人们通常必须利用数值积分的技术,譬如像辛普森法.

弧长公式的推导 弧长公式的推导其根基是毕达哥拉斯定理. 设 $y = f(x)$ 为 $a \leqslant x \leqslant b$ 上具连续导数的函数.

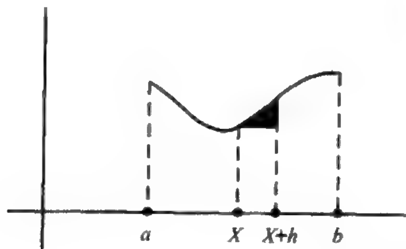


现在考虑相伴于此曲线的弧长函数:

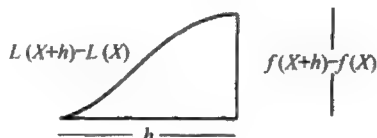
$L(X)$ = 曲线 $y = f(x)$ 对 $a \leqslant x \leqslant X$ 的弧长.

(这个函数非常类似于在证明微积分基本定理的过程中定义的面积函数.)

考虑此曲线的一小段.



当放大上图中带阴影的区域时,我们看到它近似于一个直角三角形,



故(由毕达哥拉斯定理)

$$h^2 + (f(X+h) - f(X))^2 \approx (L(X+h) - L(X))^2.$$

除以 h^2 并开平方根产生了

$$\sqrt{1 + \left(\frac{f(X+h) - f(X)}{h}\right)^2} \approx \frac{(L(X+h) - L(X))}{h}.$$

下一步,我们取 $h \to 0$ 时的极限(我们做得正当其时)得到公式

$$\sqrt{1 + f'(X)^2} = L'(X).$$

(在区间 $a \leqslant x \leqslant X$) 对两边取积分,并回想起,由定义有 $L(a) = 0$. 故

$$\int_a^X \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x = L(X).$$

§16.3 的习题

在指明的区间上用你的 CAS 作下列函数 $f(x)$ 中每一个的图像. 计算弧长.

(1) $y^2 = 9x^3, (1 \leqslant x \leqslant 2)$.

(2) $y = \cosh(x), (0 \leqslant x \leqslant 3)$.

(3) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}, (2 \leqslant x \leqslant 3)$.

(4) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}, (1 \leqslant x \leqslant 3)$.

在指明的区间上用你的 CAS 画出下列函数 $f(x)$ 中每一个的图像. 把弧长表示为一个积分并用你的 CAS 计算此积分到 3 位小数.

(5) $y^2 = \ln(x), (1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e})$.

(6) $y = x^2, (0 \leqslant x \leqslant 2)$.

(7) $y = \sin(x), (1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2})$.

(8) $y = \ln(\cos(x)), (0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4})$.

(9) $y = \mathrm{e}^x, (0 \leqslant x \leqslant 10)$.

(10) $y^2 = \sin(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, \left(\frac{1}{10} \leqslant x \leqslant 1\right)$.

(11) 给定 $p \neq 1$. 计算曲线 $y = \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{x^{1-p}}{4(p-1)}$ 对 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 的长度. 在你的答案中仍旧用 p 来表达.

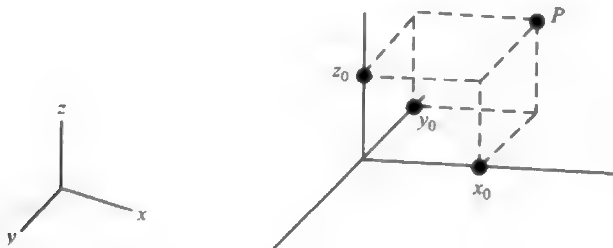
16.4 作为对横截面面积求和的体积

考虑在 3 维空间中的一个实心物体,例如棱锥或球.

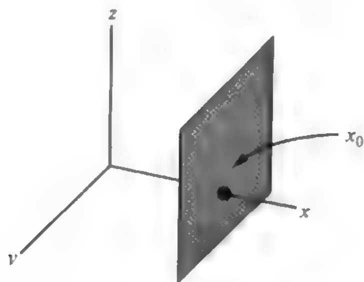


问题 如何能算出这种物体的体积?

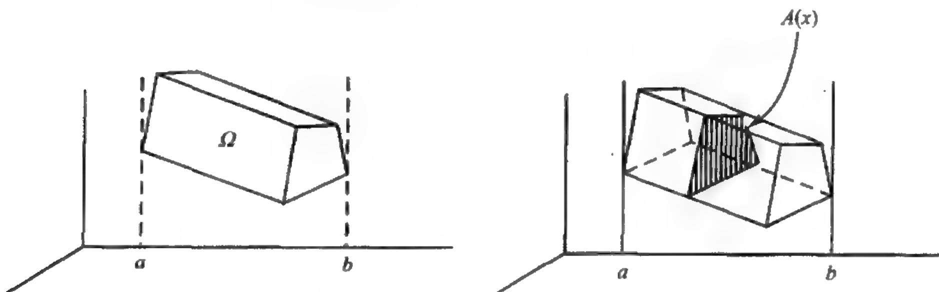
有种种方法来做这类计算. 我们特别注意的第一个方法是非常自然的,它是一个对横截面面积求和的过程. 首先需要由一个三维坐标系给出的对三维空间的一个固定的参考标架,它由三条相互垂直的直线 x,y 和 z 轴组成. 三维空间中每点 P 由坐标的一个三元组(x_0,y_0,z_0) 明确指定.



我们将需要引进在 x_0 的平面. 它可被想像为一个垂直于 x 轴的玻璃片,它通过了 x 轴上的点 x_0.



现在考虑处于我们空间中的一个 3 维实体.

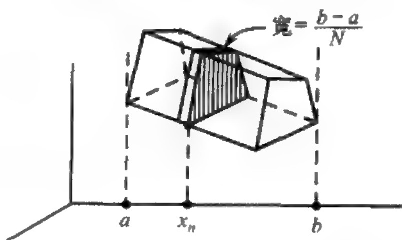


我们假定物体 Ω 位于在 a 和 b 处的平面之间. 对 $a \leqslant x \leqslant b$ 中每个点 x 让 $A(x)$ 代表在 x 处的横截面的面积(在上右图中它被涂上阴影). 固定一个大的整数 N 并将区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 分成 N 个等长的子区间,其端点在

$$x_n = a + n\frac{b-a}{N}(0 \leqslant n \leqslant N)$$

处. 我们的物体被分解为 N 个盒状片段,其在 x_n 的片段(见下图)具有体积

$$A(x_n) \cdot \frac{(b-a)}{N}.$$



取当 $N \to \infty$ 的极限得到

$$\begin{aligned}体积(\Omega) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} A(x_n)\frac{(b-a)}{N} \\ &= \int_a^b A(x)\,dx.\end{aligned}$$

概括起来,我们已经证明了如下定理.

命题 16.9　设 Ω 是个三维实体,它位于在 x 轴上点 a 和 b 的平面之间,其中 $a < b$. 如果 $A(x)$ 是在 x 的横截面的面积,则

$$面积(\Omega) = \int_a^b A(x)\,dx.$$

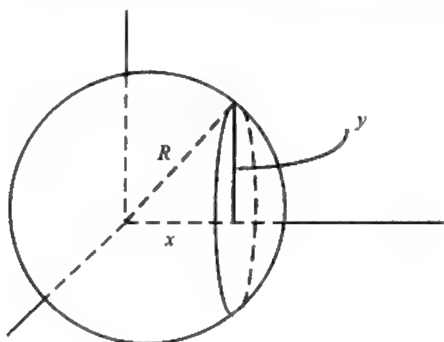
例 16.10　半径 R 的球的体积是什么?

我们从把球放在使其中心位于原点的位置着手. 在 x 处的横截面面积为 πy^2,其中 $x^2 + y^2 = R^2$. 因此

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(R^2 - x^2),$$

于是我们得一个体积公式:

$$体积(球) = \int_{-R}^{R}\pi(R^2 - x^2)\,dx = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

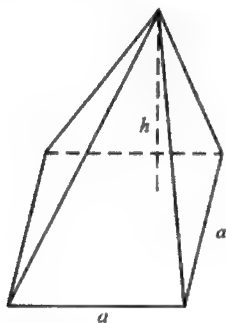


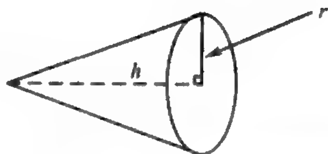
§16.4 的习题

计算下面三维物体的体积.

(1) 高为 h,底为边长 a 的正方形的棱锥.

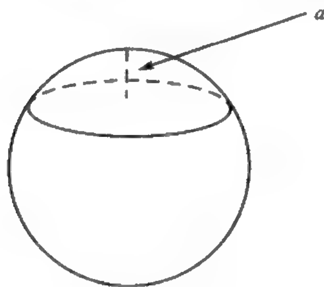
(2) 半径为 r,高为 h 的直立圆锥.

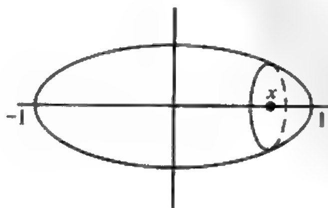




(3) 半径为 r 的球的高为 a 的上部.

(4) 一个在 x 的横截面的面积是半径为$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ 的圆的一只蛋.





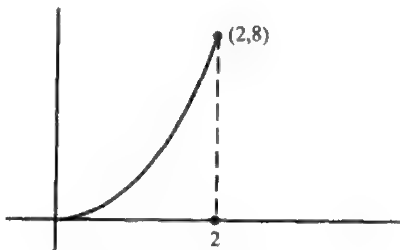
(5) 一个物体是由移动等边三角形扫描出来的，此等边三角形垂直于 x 轴且中心在 x 轴上. 等边三角形的边的长 $L(x)$ 按 $L(x) = \frac{1}{4}(1-x)^2$ 的公式变化. 如果三角形开始于 $x = 0$ 并移动至 $x = 1$. 所得到的物体的体积是什么?

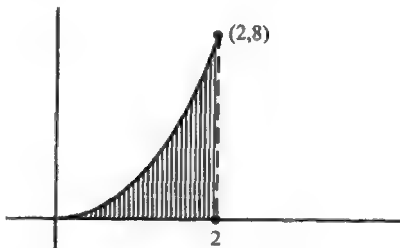
(6) 一个物体是由移动一个矩形扫描出来的，此矩形垂直于 x 轴且中心在 x 轴上. 矩形的面积 $A(x)$ 按公式 $A(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ 变化. 求在 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 所得到的物体的体积.

16.5　旋转体的体积

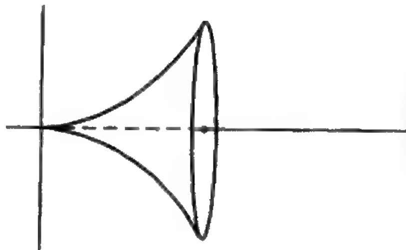
一个旋转体是绕一个轴旋转某曲线下的面积得到的物体.

例 16.11(大号)　考虑在 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 上的曲线 $y = x^3$. 让我们在此曲线和 x 轴中的面上涂上阴影.

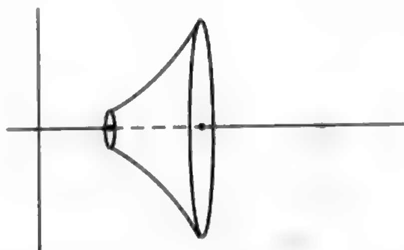




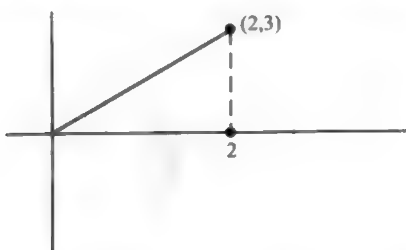
现在想像这个带阴影的区域在绕 x 轴旋转(像早期飞机的螺旋桨那样). 我们得到一个像低音大号一部分的物体.

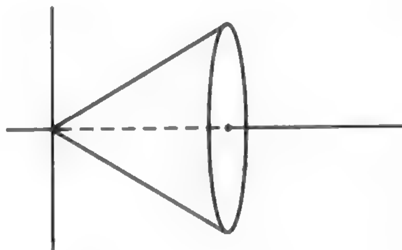


例 16.12(铃铛)　如果将曲线 $y = x^3$ 限制在区域 $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$，然后旋转此曲线和 x 轴之间的区域，我们得到一个像似铃铛的物体.



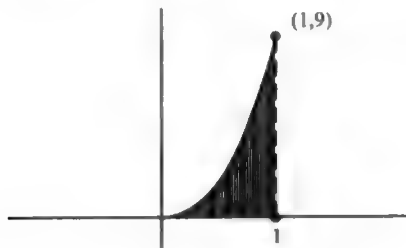
例 16.13(锥) 考虑直线 $y=\frac{3x}{2}$ 和线段 $0\leqslant x\leqslant 2$ 之间的区域. 当我们绕 x 轴旋转此区域. 我们得到一个圆锥.

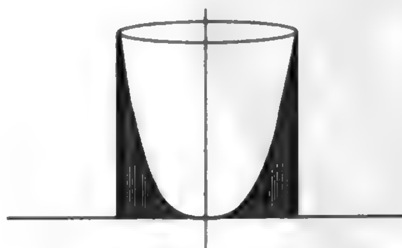




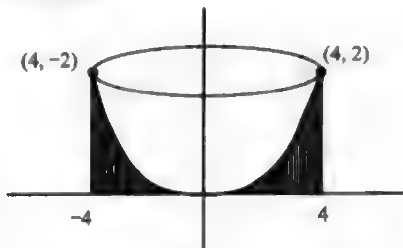
我们现在给出一些绕 y 轴旋转的例题.

例 16.14(酒杯) 考虑在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的函数 $y=10^x-1$. 此曲线和 x 轴之间的面在下图中被涂上阴影. 当我们绕 y 轴旋转此带阴影的区域(像一个旋转木马) 我们得到一个类似于玻璃杯的图形. 注意到所得图形的内部是完全空的,可以盛液状物.

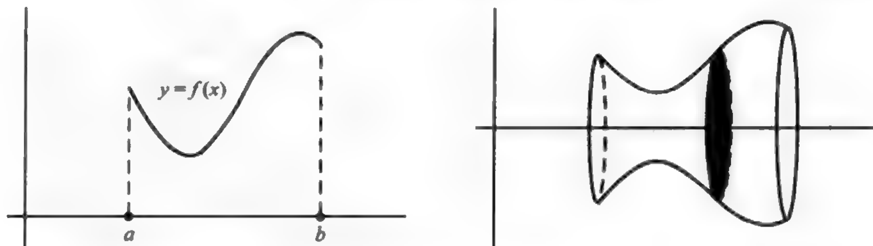




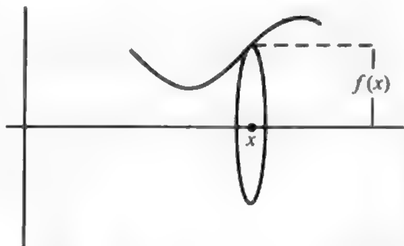
例 16.15（色拉碗）　如果我们选取在区间 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 上的一个函数 $y = \sqrt{x}$，绕 y 轴旋转它生成一只色拉碗.



每个前面构造的物体的体积可以用计算积分的方法来算出. 首先考虑绕 x 轴旋转函数 $y = f(x)\ (a \leqslant x \leqslant b)$ 得到的物体. 所得到的物体被描画在下右图中.



上面带阴影的区域是在 x 轴上点 x 的横截片.

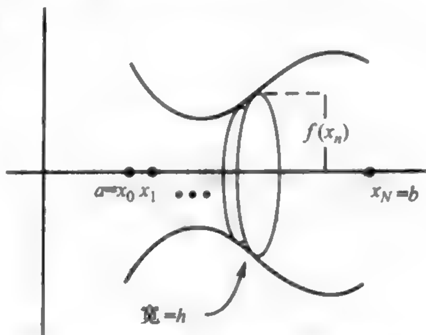


此截片是个半径 $|f(x)|$ 中心在 x 的圆，其面积的准确值为 $\pi f(x)^2$. 固定一个方整数 N 并分区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 为 N 个等长的子区间，其端点为

$$x_n = a + n \cdot \frac{b - a}{N} \quad (0 \leqslant n \leqslant N).$$

这个物体的总体积可以被分解为 N 个横截面圆盘状的片，厚度为 $h = \dfrac{b - a}{N}$，其

中对 $n=1,2,\cdots,N$，每个三维圆盘状的片中心在 x_n 并且半径近似地等于 $|f(x_n)|$. 把这些片的体积加起来并让 $N\to\infty$ 便给出了我们的旋转体的体积，



$$\text{体积}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\pi f(x_n)^2\cdot\frac{b-a}{N}$$

$$=\int_a^b \pi f(x)^2\mathrm{d}x.$$

概括起来，我们已经证明了：

命题 16.16 *设 $\mathscr{R}$ 代表曲线 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 和 x 轴之间的区域. 绕 x 轴旋转 $\mathscr{R}$ 得到的物体的体积由下面公式给出：*

$$\text{体积}=\int_a^b \pi f(x)^2\mathrm{d}x.$$

在我们的第一个例题中，大号（见例 16.11）的体积由

$$\text{体积(大号)}=\int_0^2 \pi x^6\mathrm{d}x=\frac{\pi x^7}{7}\bigg|_0^2=\frac{128\pi}{7}$$

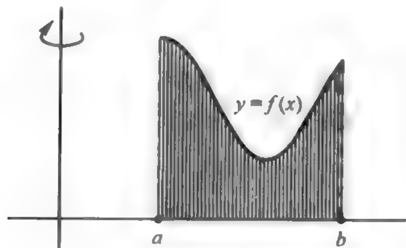
给出. 相似地，例 16.12 的铃铛的体积是

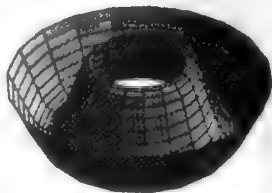
$$\text{体积(铃铛)}=\int_{\frac{1}{2}}^2 \pi x^6\mathrm{d}x=\frac{\pi x^7}{7}\bigg|_{\frac{1}{2}}^2=\frac{128\pi}{7}-\frac{\pi}{7.128},$$

而例 10.13 中 的锥的体积是

$$\text{体积(锥)}=\int_0^2 \pi\frac{9x^2}{4}\mathrm{d}x=\frac{9\pi}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2=6\pi.$$

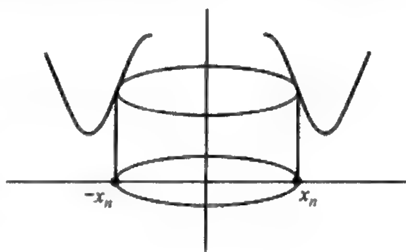
我们现在改变一下视角而讲述一个曲线绕 y 轴旋转时的体积公式. 在下面的讨论中我们局限在位于 x 轴上方的曲线. 考虑在曲线 $y=f(x),0\leqslant a\leqslant x\leqslant b$ 下方的带有阴影的面积. 像旋转木马那样绕 y 轴转动此区域产生了下面墨西哥草帽状的物体.





让我们(像在绕 x 轴旋转情形所做过的那样)把区间分成等长的 N 个子区间,其端点为

$$x_n = a + n \cdot \frac{b-a}{N} \quad (0 \leqslant n \leqslant N).$$



考虑在 x_n 的一个圆柱形的壳. 这个壳的面积为 $2\pi x_n \cdot f(x_n)$. 我们的物体的体积便是这 N 个厚度为 $\frac{b-a}{N}$ 的圆柱形壳状片的体积和的极限(其中设 $N \to \infty$). 因此得到了此旋转体的体积公式:

$$\begin{aligned}\text{体积} &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} 2\pi x_n \cdot f(x_n) \cdot \frac{b-a}{N} \\ &= \int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是,我们已证明了:

命题 16.17　*设 $f(x)$ 是区间 $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b$ 上非负的连续可积函数. 设 $\mathscr{R}$ 表示曲线 $y = f(x)$ $(0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b)$ 与 x 轴之间的区域. 由绕 y 轴转动 $\mathscr{R}$ 得到的旋转体的体积由下面公式给出:*

$$\text{体积} = \int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

酒杯的体积(例 16.14)由下面算出:

$$\text{体积(酒杯)} = \int_0^1 2\pi x(10^x - 1)\,\mathrm{d}x,$$

而色拉碗的体积正是

$$\text{体积(碗)} = \int_0^4 2\pi x \cdot \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

§16.5 的习题

用你的 CAS 画出下列每条曲线(在指定区间上)的图. 在曲线和指明的轴之间的区域上涂上阴影并想像绕那条轴转动此区域得到的旋转体. 使用你的 CAS 给出此物体的三维透视图形. 最后,计算此物体的体积.

(1) $y = x^4$, $(0 \leqslant x \leqslant 3)$, 绕 x 轴旋转.

(2) $y = 3x + 1$, $(1 \leqslant x \leqslant 2)$, 绕 x 轴旋转.

(3) $y = x^3$, $(0 \leqslant x \leqslant 2)$, 绕 y 轴旋转.

(4) $y = |1-x|, \left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$,绕 x 轴旋转.

(5) $y = |1-x|, \left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$,绕 y 轴旋转.

(6) $y = x^{\frac{2}{3}} (0 \leqslant x \leqslant 10)$,绕 x 轴旋转.

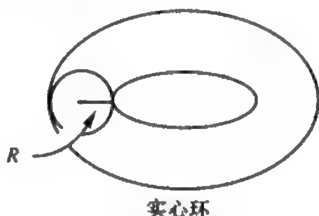
(7) $y = \sin(x) \left(\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$,绕 y 轴旋转.

(8) $y = \sqrt{1-x^2} (-1 \leqslant x \leqslant 1)$,绕 x 轴旋转.

(9) $y = \sqrt{1-x^2} (0 \leqslant x \leqslant 1)$,绕 y 轴旋转.

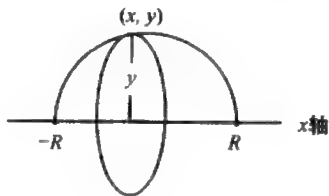
(10) $y = e^x (1 \leqslant x \leqslant 10)$,绕 x 轴旋转.

(11) 求一个直径 D 的实心环(炸面包圈)的体积,其横截面是个半径为 R 的圆.



实心环

(12) 尽管我们生活在一个三维世界里,然而有可能假定存在四条相互垂直的直线,它们给出了四维空间的特征. 找出一个表示半径 R 的四维球的体积公式. **提示**: 画出半圆 $y = \sqrt{R^2 - x^2}, (-R \leqslant x \leqslant R)$. 在半圆上每点 (x, y) 绕第四维的轴旋转这个半径为 y 的圆(它垂直于 x 轴,见下图). 它给出一个伸进第四维的一个三维球. 对 $-R \leqslant x \leqslant R$ 加起(积分)这些球的体积.



第十七章　关于积分的其他论题

17.1　对数函数的积分表示

回想$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x)=\frac{1}{x}$;微积分基本定理要求有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln(x)+C.$$

如果我们用另外的事实即 $\ln(1)=0$,则得到了更加精确的公式表述

$$\ln(X)=\int_1^X\frac{\mathrm{d}x}{x}. \tag{17.1}$$

现在我们直接证明积分表示(17.1)满足对数函数的性质:

性质 1　$\ln(XY)=\ln(X)+\ln(Y)$.

性质 2　$\ln(X/Y)=\ln(X)-\ln(Y)$.

性质 3　$\ln(X^r)=r\ln(X)$.

要验证性质 1,我们注意到

$$\ln(XY)=\int_1^{XY}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^X\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_X^{XY}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$=\ln(X)+\int_X^{XY}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

要计算最后面的那个积分我们使用换元

$$u=\frac{x}{X}.$$

在此替换下积分的限有了如下改变：$x=X$ 成为 $u=1$ 而 $x=XY$ 成为 $u=Y$，而 $\frac{dx}{x}$ 成为

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{u}.$$

因此

$$\int_X^{XY}\frac{dx}{x}=\int_1^Y\frac{du}{u}=\ln(Y).$$

性质 2 以极其相同的方式就能验证. 要验证性质 3

$$\ln(X^r)=r\ln(X),$$

我们使用换元 $u=x^{\frac{1}{r}}$. 代入 $x=1$，变成 $u=1^{1/r}=1$；而 $x=X^r$ 变为 $u=(X^r)^{1/r}=X$. 进而 $du=\frac{1}{r}x^{\frac{1}{r}-1}dx$，因而

$$\frac{dx}{x}=\frac{rx^{1-\frac{1}{r}}du}{x}=r\frac{du}{x^{1/r}}=r\frac{du}{u}.$$

我们最后有

$$\int_1^{X^r}\frac{dx}{x}=\int_1^X r\frac{du}{u}=r\ln(X).$$

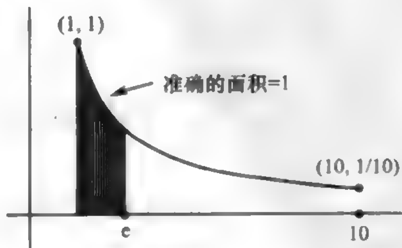
方程(17.1)可以用来给出数 e 的另一种定义(多少有点怪异). 回想一下，由定义，$\ln(e)=1$.

定义 数 e 是大于 1 的满足性质

$$\int_1^e\frac{dx}{x}=1$$

的唯一实数.

从图上看，数 e 对应于在 x 轴上标出的那个点使得在曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下方带阴影的区域(见右图)具有正好等于 1 的面积.



直接通过积分表示

$$\ln(x)=\int_1^x\frac{dt}{t}$$

来定义函数 $\ln(x)$，从而定义 e^x 为 $\ln(x)$ 的

逆，是可能的. 前面证明了的 $\ln(x)$（从而 e^x）的种种性质，让我们能够证明最重要的微分规则中的一个：

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}.$$

验证此规则的最直接的办法就是去计算极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+h)^r - x^r}{h}.$$

可惜当 r 是任意实数时的复杂定义使得处理此极限非常不可行，除非 r 是个整数或有理数. 要处理这个一般情形我们使用恒等式 $x^r = e^{r\ln(x)}$ 而后用链规则微分，情形如下：

$$\frac{d}{dx}x^r = \frac{d}{dx}e^{r\ln(x)} = r\cdot\frac{1}{x}e^{r\ln(x)} = r\frac{1}{x}x^r = rx^{r-1}.$$

§17.1 的习题

计算下列积分

(1) $\int\frac{dx}{x-r}$.

(2) $\int\frac{x^3}{x^4+2}dx$.

(3) $\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx$.

(4) $\int\frac{\ln(x)}{x}dx$.

(5) $\int\frac{x}{1+x^2}dx$.

(6) $\int\frac{(\sec(x))^2}{\tan(x)}dx$.

(7) $\int\ln(\sqrt{x})dx$.

(8) $\int\sin(\ln(x))dx$.

(9) $\int\frac{x-1}{x^2-1}dx$.

(10) $\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$.

(11) $\int\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}dx$.

(12) $\int\frac{\cos(x)\sin(x)}{1-(\cos(x))^2}dx$.

(13) 用 $\ln(x)$ 的积分表示证明 $\ln(x)\leqslant(x-1)$ 对 $x\geqslant 1$ 成立.

(14) 直接从 $\ln(x)$ 的积分表示证明对 $x<1$，$\ln(x)<0$.

(15) 以证明 $\int_1^3\frac{dt}{t}>1$ 和 $\int_1^2\frac{dt}{t}<1$ 去论证 $2<e<3$. 试进行解释.

(16) 以辛普森法计算 $\int_1^2\frac{dt}{t}$ 去计算 $\ln(2)$ 的值到 3 位小数.

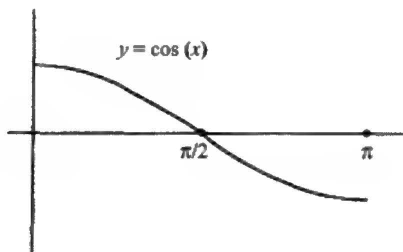
17.2 反三角函数的积分表示

在例 8.15 中我们曾看到函数 $y=\arcsin(x)$ 有定义域 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 和值域 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，而其导数由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

给出. 这导致了积分表示

$$\arcsin(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + C.$$



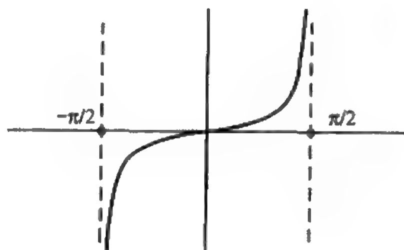
函数 $y = \cos(x)$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上是一对一的,并且满足等式

$$\arccos(\cos(x)) = x, 0 \leqslant x \leqslant \pi;$$
$$\cos(\arccos(x)) = x, \ -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

在 §8.4 的习题(5) 中已证明过 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,它导出了积分表示

$$\arccos(x) = -\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + C.$$

函数 $y = \tan(x)$ 在区间 $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 为一对一的,并且在 $x = \pm \pi/2$ 有竖直渐近线.



因此由定义, $\tan(x)$ 的逆函数(记为 $\arctan(x)$) 满足:

$$\arctan(\tan(x)) = x, \ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$\tan(\arctan(x)) = x, \ -\infty < x < \infty,$$

以及

$$\lim_{x\to\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to-\infty}\arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

命题 17.1　下列等式成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\arctan(x) = \int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + C.$$

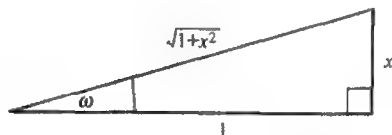
证明　再次从恒等式 $\tan(\arctan(x)) = x$ 着手，我们微分其两边得到等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(\arctan(x)) = \frac{1}{(\cos(\arctan(x)))^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = 1,$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = (\cos(\omega))^2,$$

其中 $\omega = \arctan(x)$.



考虑上面的直角三角形，其中 $\tan(\omega) = x$，我们推断出

$$\cos(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

因而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = (\cos(\omega))^2 = \frac{1}{1+x^2}.$$

§17.2 的习题

计算下列积分. 用 CAS 检验你的工作：

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$. (2) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$. (3) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

(4) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{9+x^2}$. (5) $\int \frac{\sin(x)}{1+(\cos(x))^2}dx$. (6) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}dx$.

(7) $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}dx$. (8) $\int_0^1 \frac{4\sqrt{x}}{1+x^3}dx$. (9) $\int \frac{x+1}{x^2+1}dx$.

(10) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x-1}{x^2+1}dx$.

17.3 有理函数的积分

一个 n 次的多项式($n = 1,2,3,\cdots$) 是一个函数 $P_n(x)$,其形式为

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为固定的实常数. 例如

$$x^7 - 3x^4 + 16x^3 - \pi x + 3.72$$

是一个 7 次的多项式,而任意常数 c 是个 0 次多项式.

定义 一个有理函数是两个多项式的比

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

其中 $Q(x)$ 不恒等于零.

例 17.2 函数

$$\frac{x^3-3}{14x^5-2x^3+1}$$

是一个有理函数,因为它是 x^3-3 与 $14x^5-2x^3+1$ 的比.

注 有理函数这个术语是由两个整数之比为有理数这个术语导出的. 有理数$\frac{19}{6}$可以重写(经长除) 为形式$\frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6}$. 以一个完全类比的方式,有理函数 $(x^5+2x^3+x-1)/(x^2+2)$ 可以写成形式

$$\frac{x^5+2x^3+x-1}{x^2+2} = x^3 + \frac{x-1}{x^2+2}.$$

更一般地,我们知道每个有理数$\frac{a}{b}$可以唯一地表示为

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b},$$

其中 q 和 r 为整数，而称做**余数**的 r 在区间 $0 \leqslant r < b$ 中. 对有理函数的类比陈述是说，每个有理函数 $\frac{a(x)}{b(x)}$ 可以具有形式

$$\frac{a(x)}{b(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}, \tag{17.2}$$

其中 $q(x)$ 和 $r(x)$ 为多项式，而 $r(x)$ 又称做**余项**，是一个次数严格小于 $b(x)$ 次数的多项式.

例 17.3　我们有

$$\frac{x^3+1}{x^2+2} = x + \frac{-2x+1}{x^2+2}.$$

问题　设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为多项式. 如何对有理函数 $a(x)/b(x)$ 积分，即 $\int a(x)/b(x)\mathrm{d}x$ 是什么?

我们以方程(17.2) 开始着手解决这个问题，然后再积分两边，

$$\int \frac{a(x)}{b(x)}\mathrm{d}x = \int q(x)\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{b(x)}\mathrm{d}x.$$

因为任意多项式(特别是 $q(x)$) 均可容易被积分，我们已经将此问题简约到下面多少简单点的问题.

问题　设 $r(x)$ 和 $b(x)$ 为多项式，其中 $r(x)$ 的次数小于 $b(x)$ 的次数. 如何积分

$$\int \frac{r(x)}{b(x)}\mathrm{d}x?$$

继续我们的类比. 考虑事实：整数总能**分解因子**(例如 $30 = 2 \times 3 \times 5$) 为**素数**的乘积(不能进一步分解的数为素数). 当我们观察多项式时，一个相似的现象出现了. 举例说，

$$x^3 - 4x = x(x-2)(x+2),$$

而每个因子 $x, x-2$ 和 $x+2$ 都是**线性函数**(次数为 1 的多项式)，它不能被进一步分解. 我们现在要在 $b(x)$ 被分解为 k 个不同线性因子的情况下给出对我们第二个问题的完全解答；这时 $b(x)$ 具形式

$$b(x) = b(x+t_1)\cdot(x+t_2)\cdot\cdots\cdot(x+t_k), \tag{17.3}$$

其中 $b \neq 0$. 分解为重因子或二次因子在后面的习题中有所处理.

因式分解(17.3) 意味着存在实数 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，使得

$$\frac{r(x)}{b(x)} = \frac{A_1}{x+t_1} + \frac{A_2}{x+t_2} + \cdots + \frac{A_k}{x+t_k}. \tag{17.4}$$

虽然这并不是马上就能明白的,但下一个例题将澄清这一点. 等式(17.4) 让我们可立刻积出我们的有理函数:

$$\int \frac{r(x)}{b(x)}dx = \int \frac{A_1}{x+t_1}dx + \int \frac{A_2}{x+t_2}dx + \cdots + \int \frac{A_k}{x+t_k}dx.$$

例 17.4 计算积分

$$\int \frac{x-1}{x^3-4x}dx.$$

要计算这个积分我们必须首先寻找出数 A_1, A_2 和 A_3 使得

$$\frac{x-1}{x^3-4x} = \frac{x-1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+2}.$$

此方程可以两边乘以 $x(x-2)(x+2)$ 进行简化,得到

$$x-1 = A_1(x-2)(x+2) + A_2x(x+2) + A_3x(x-2).$$

现在可代入 x 的方便的值算出 A_1, A_2 和 A_3. 令 $x=0$,我们有

$$-1 = -4A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4},$$

如果 $x=2$,

$$1 = 8A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{8},$$

如果 $x=-2$,

$$-3 = 8A_3 \Rightarrow A_3 = \frac{-3}{8}.$$

由此有

$$\int \frac{x-1}{x^3-4x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{3}{8}\int \frac{1}{x+2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x) + \frac{1}{8}\ln(x-2) - \frac{3}{8}\ln(x+2) + C.$$

例 17.5 计算积分

$$\int \frac{x^3-5x^2+8x-2}{x^2-5x+6}dx.$$

这时,因为 x^3-5x^2+8x-2 的次数为3,它大于 x^2-5x+6 的次数,我们必须首先做长除:

$$\frac{x^3-5x^2+8x-2}{x^2-5x+6} = x + \frac{2x-2}{x^2-5x+6}.$$

其次,我们分解分母,$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$,并将其代入积分,我们得到

$$\int \frac{x^3-5x^2+8x-2}{x^2-5x+6}dx = \int x dx + \int \frac{2x-2}{x^2-5x+6}dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + \int \frac{2x-2}{x^2-5x+6}dx.$$

要完成计算还需要找出 A_1, A_2，使

$$\frac{2x-2}{x^2-5x+6} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x-3},$$

或等价地，

$$2x-2 = A_1(x-3) + A_2(x-2).$$

令 $x=2$ 我们推出 $A_1=-2$，相似地，令 $x=3$ 我们得到 $A_2=4$. 代入这些值到积分中最后有

$$\int \frac{2x-2}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{-2}{x-2}dx + \int \frac{4}{x-3}dx$$
$$= -2\ln(x-2) + 4\ln(x-3) + C.$$

因而最终

$$\int \frac{x^3-5x^2+8x-2}{x^2-5x+6}dx = \frac{x^2}{2} - 2\ln(x-2) + 4\ln(x-3) + C.$$

§17.3 的习题

用你的 CAS 进行将下列有理函数写成(17.2)的形式所需要的必要的长除法

(1) $\frac{1}{x^2-9}$.　(2) $\frac{x^3+2}{x^2-4}$.　(3) $\frac{x^7+3}{x-2}$.

(4) $\frac{6x^4-2x^3+11}{x^3+2}$.　(5) $\frac{3x^{19}-2x^5+1}{x^3-2x+1}$.　(6) $\frac{x^{11}-13x^3+2x-3}{x^4+2x+3}$.

计算下列有理函数的积分. 用你的 CAS 分解多项式为因子并进行必要的长除.

(7) $\int \frac{x+2}{x^2-9x}dx$.　(8) $\int \frac{x^4+2}{x^2-2x-3}dx$.

(9) $\int \frac{3x+1}{x^3-9x}dx$.　(10) $\int \frac{x^5}{x^4-5x^2+4}dx$.

(11) $\int \frac{x^3+2x^2+3}{x^4+2x^3-9x^2-18x}dx$.　(12) $\int \frac{x^8-2x^4+2}{x^5-6x^3+8x}dx$.

(13) 求常数 A, B_1, B_2 使得

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2}.$$

用此结果计算$\int \frac{3x+1}{(x-1)(x+3)^2}dx$.

(14) 求常数A_1, A_2, B_1, B_2, B_3使得

$$\frac{x-2}{(x^2-1)(x+2)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_3}{(x+2)^3}.$$

用此结果计算$\int \frac{x-2}{(x^2-1)(x+2)^3}dx$.

(15) 求常数A_1, A_2, B, C使得

$$\frac{x^2}{16-x^4} = \frac{A_1}{2-x} + \frac{A_2}{2+x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

用此结果计算$\int \frac{x^2}{16-x^4}dx$.

(16) 求常数A, B, C, D使得

$$\frac{x^2-1}{(x^2+3)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{(x^2+3)^2}.$$

用此结果计算积分$\int \frac{x^2-1}{(x^2+3)^2}dx$.

17.4 其他的换元变换

至此,我们已经用换元变换、分部积分和部分分式计算不定积分. 因为没有求任意函数的反导数的一般算法(你是否能找到一个你的 CAS 不能处理的函数,这是个好的挑战),我们在此节提出一组有用的(并非显然的)经典换元变换.

第一类换元是**三角函数替换**,我们在下面例题中予以解释.

例 17.6 计算$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

如果设$x = 3\sin(\theta)$,则$dx = 3\cos(\theta)$,而由于$(\sin(\theta))^2 + (\cos(\theta))^2 = 1$,我们的积分成为

$$\begin{aligned}\int \frac{3\cos(\theta)}{\sqrt{9-9(\sin(\theta))^2}}d\theta &= \int \frac{1}{\cos(\theta)} \cdot \cos(\theta)d\theta \\ &= \theta \\ &= \arcsin\left(\frac{x}{3}\right).\end{aligned}$$

尽管三角函数替换可按许多方式被利用,但还是可以在被积项中找到一些一般

模式. 下面的表只打算被当作一个导引而不是规则:

如果出现$\sqrt{a^2 - x^2}$,试一试 $x = a\sin(\theta)$;

如果出现$\sqrt{a^2 + x^2}$,试一试 $x = a\tan(\theta)$;

如果出现$\sqrt{x^2 - a^2}$,试一试 $x = a\sec(\theta)$.

上述的换元将把原来的积分变换成一个包含三角函数的积分. 这时或使用 CAS 或诉诸于大量的三角等式来完成计算. 重要之处在于认识到这些被建议的换元变换它们自身是建立在恒等式$(\sin(\theta))^2 + (\cos(\theta))^2 = 1$ 的基础之上的.

例 17.7 计算$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

按照我们的导引令 $x = a\sec(\theta)$,因此 $dx = a\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$,而我们的积分成为

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \sec(\theta) d\theta.$$

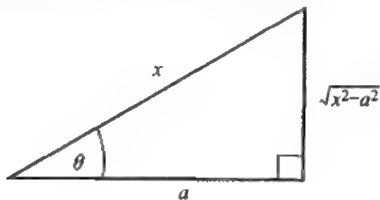
后面的那个积分不完全是平凡的,需要注意. 注意到

$$\frac{d}{d\theta}(\sec(\theta) + \tan(\theta)) = (\sec(\theta))^2 + \sec(\theta)\tan(\theta).$$

此等式让我们将第二个积分变换为

$$\begin{aligned}\int \sec(\theta) d\theta &= \int \sec(\theta) \overbrace{\left(\frac{\sec(\theta) + \tan(\theta)}{\sec(\theta) + \tan(\theta)}\right)}^{\text{小技巧:乘以1}} d\theta \\ &= \ln(\sec(\theta) + \tan(\theta)) + C.\end{aligned}$$

为了得到用原来变量表示的答案,我们考虑三角形



从而得出结果

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \ln(\sec(\theta) + \tan(\theta)) + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \ln(a) + C.\end{aligned}$$

我们将考虑的下一类换元变换是被称做**双曲函数替换**. 回忆函数 $\cosh(t)$ 和$\sinh(t)$,它们满足$(\cosh(t))^2-(\sinh(t))^2=1$(见 §8.3). 在例17.7中我们也能用替换 $x=a\cosh(t)$ 和 $dx=a\sinh(t)$ 简约此积分为形式

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sinh(t)}{a\sinh(t)}dt=t=\operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right).$$

(见 §17.4 的习题(20),有 $\operatorname{arccosh}(t)$ 的一个显式表示).

有时三角函数替换会带来可怕复杂的(三角函数的)积分,但一个双曲函数替换却容易可行.

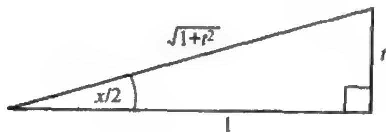
例 17.8 计算

$$\int\sqrt{4+x^2}dx.$$

这种情形中三角函数替换会使事情更糟. 然而令 $x=2\sinh(t)$,$dx=2\cosh(t)dt$,我们的积分就易于处理了. 由于 $1+(\sinh(t))^2=(\cosh(t))^2$,

$$\begin{aligned}\int\sqrt{4+x^2}dx&=4\int\cosh(t)\cdot\cosh(t)dt\\&=4\int\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}dt\\&=\int(e^{2t}+2+e^{-2t})dt\\&=\frac{e^{2t}}{2}+2t-\frac{e^{-2t}}{2}+C.\end{aligned}$$

本节我们要讲的最后一个替换是**魏尔斯特拉斯替换**,(魏尔斯特拉斯是一位19世纪的卓越数学家.)它是将任意涉及到的三角函数的有理表达式变换为只涉及单变量t的一个有理函数. 此替换是$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$,$dt=dx/2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2$;当我们分析下面的三角形并同时用恒等式$\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)$及$\cos(2\theta)=1-2(\sin(\theta))^2$时,



它产生了等式

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

正如我们将在下一个例题中看到的,这个似乎复杂的替换是极其有效的.

例 17.9　计算

$$\int \frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx.$$

按照魏尔斯特拉斯方法,我们的积分取形式

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{dt}{1+t} \\ &= \ln(1+t)+C \\ &= \ln\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C.\end{aligned}$$

§ 17.4 的习题

借助于基本等式

$$(\sin(x))^2+(\cos(x))^2 = 1, (\sin(x))^2 = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)), (\cos(x))^2 = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)),$$

计算下面的三角函数积分. 用 CAS 检验你的答案.

(1) $\int (\sin(x))^3 dx$.　　(2) $\int (\sin(x))^3(\cos(x))^2 dx$.

(3) $\int (\cos(x))^2 dx$.　　(4) $\int (\sin(x))^4 dx$.

(5) $\int (\cos(x))^5 dx$.　　(6) $\int (\sin(x))^2(\cos(x))^4 dx$.

用适当的替换,分部积分等等方法计算下列积分. 像通常那样,用 CAS 检验你的答案.

(7) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.　　(8) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$.

(9) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$.　　(10) $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+x^{3/2})}dx$.

(11) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}dx$.　　(12) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$.

(13) $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx$. 提示:令 $x = \ln(u)$.　　(14) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}dx$.

(15) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$. 提示：令 $x = (\sin(u))^2$.

(16) $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$.

(17) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(18) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{d}x$.

(19) 证明如果 $x = \sinh(t)$ 则 $t = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$. 提示：令 $u = e^t$ 于 $\sinh(t)$ 的定义中，然后解出 u，再用 $t = \ln(u)$.

(20) 证明如果 $x = \cosh(t)$ 则 $t = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$. 用习题(19) 作为一个引导.

(21) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$.

(22) $\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

(23) $\int x\arcsin(x)\,\mathrm{d}x$.

(24) $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\mathrm{d}x$.

(25) $\int x\arccos(x)\,\mathrm{d}x$.

(26) $\int \frac{1}{2+\tan(x)}\mathrm{d}x$.

(27) $\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

(28) $\int x^2(\ln(x))^2\,\mathrm{d}x$.

(29) $\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$. 提示：试用 $x = \frac{1}{z}$.

(30) $\int \frac{1}{3-2\cos(x)}\mathrm{d}x$.

(31) $\int \frac{1}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}\mathrm{d}x$. 提示：试用 $x = \frac{1}{z}$.

(32) $\int \frac{1}{4\sin(x)}\mathrm{d}x$.

(33) $\int \frac{1}{x^2(4+x^2)}\mathrm{d}x$.

(34) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$.

(35) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$.

(36) $\int \frac{\arctan(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

17.5 反常积分

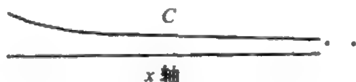
考虑一个薄薄的无限长的长方形：



这个长方形的面积为无穷在直观上是清楚的，但是对任何无穷的图形总是如此吗?更准确地我们提出下面的问题：

提问 是否存在这样一条曲线 C，它(当 $x\to\infty$ 时) 变成渐近于 x 轴，使得在曲线与 x 轴之间区域的面积是有限的?

回答 这种情况是可能(虽说不是显然的). 主要的理由是，它可能具有一个数的无穷序列，譬如



$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,$$

其和为有限. 在序列$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$ 的情形其和恰是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1.$$

这可由下面的极限过程看出.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^N}=\frac{2^N-1}{2^N},$$

而且,当取极限时,我们得到了这个和:

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^N}\right]=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{2^N-1}{2^N}\right)$$

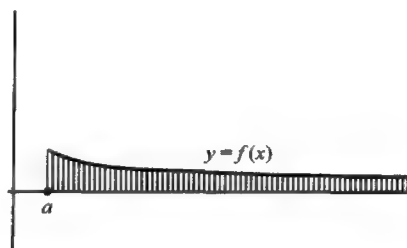
$$=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^N}\right)=1.$$

假定有一条曲线 C 使得矩形型的区域 $R_1,R_2,R_3,\cdots$



满足条件面积$(R_1)=1/2$,面积$(R_2)=1/4$,面积$(R_3)=\frac{1}{8},\cdots$,于是作为所有这些较小面积和的曲线下方的面积仅仅为 1.

现在考虑任意曲线 $y=f(i)$,它在 $x\to\infty$ 时以 x 轴为渐近线.



带有阴影的区域(它可以有限也可以无限)由积分

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

给出. 因为是在区间 $a \leqslant x < \infty$ 上积分,上述积分被叫做**反常数**. 我们由定义

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to\infty}\int_a^{B} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

给出此类积分的意义.

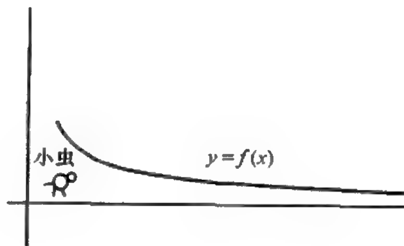
例 17.10 计算积分

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x.$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{B\to\infty}\int_1^{B} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{B\to\infty} -x^{-1}\Big|_1^B \\ &= \lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{B}+1\right) = 1.\end{aligned}$$

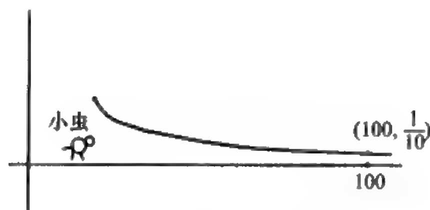
提问 是否存在这样一条曲线 $y = f(x)$,它渐近于 x 轴,并具有下面的性质:



(1) 曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴之间区域 R 的面积为无穷.

(2) 曲线与 x 轴之间的距离变成任意小,即一只小虫完全不可能爬过 R.

回答　曲线 $y = \sqrt{x}$ 将能达到目的.



如果这个小虫的厚度为1/10英寸,它会在点 $x \approx 100$ 处被卡住. 但是此区域的面积可由下面计算看到是无穷大.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \lim_{B\to\infty}\int_1^B \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{B\to\infty} 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^B \\ &= \lim_{B\to\infty}(2\sqrt{B} - 2) = \infty.\end{aligned}$$

例 17.11　对 p 的哪些值

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

为有限?

抽出 $p = 1$ 的情形;此积分容易看出为无穷:

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{B\to\infty}\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{B\to\infty}(\ln(B) - \ln(a)) = \infty.$$

当 $p \neq 1$,我们有两个可能性:

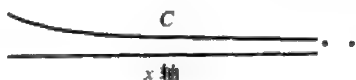
$$\begin{aligned}\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} &= \lim_{B\to\infty}\int_a^B \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \\ &= \lim_{B\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^B \\ &= \lim_{B\to\infty}\left(\frac{B^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right) \\ &= \begin{cases}\infty, & \text{如果 } p < 1, \\ \dfrac{-a^{1-p}}{1-p}, & \text{如果 } p > 1.\end{cases}\end{aligned}$$

例 17.12 计算$\int_{-\infty}^{3} e^{2x}dx$.

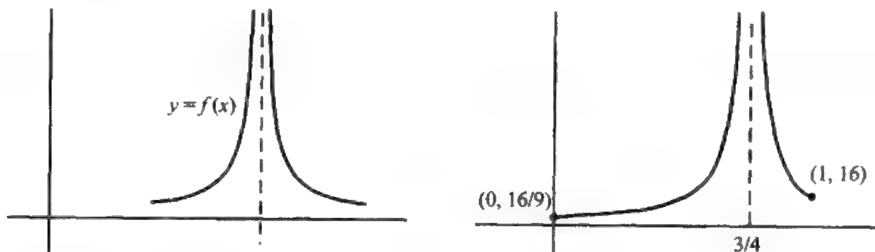
这时的积分可按如下计算：

$$\int_{-\infty}^{3} e^{2x}dx = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{3} e^{2x}dx$$
$$= \lim_{B\to-\infty}\left(\frac{e^6}{2}-\frac{e^{2B}}{2}\right)=\frac{e^6}{2}.$$

到此时我们所讨论过的反常积分都是由无限长的水平区域引起来的，而且这个区域与曲线 C 渐近于 x 轴相关联.



但是也有可能有一个无限长的竖直区域，它来自一条具竖直渐近线(虚线)的曲线 $y = f(x)$. 例如，曲线 $y = (x - 3/4)^{-2}$ 在点 $x = 3/4$ 有一条竖直的渐近线.



问题 在曲线

$$y = \frac{1}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}$$

(对 $0 \leqslant x \leqslant 1$) 下方的无限长的竖直区域有无限面积吗?

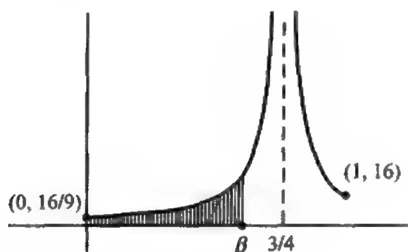
暂时假定所考虑的积分是有限的. 那么由 13.4 节的性质(3)，此积分分解为两个积分的和：

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2} = \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2} + \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}.$$

专注于两个积分中的第一个，我们首先对 $0 < \beta < 3/4$ 计算

$$\int_0^\beta \frac{1}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}\mathrm{d}x,$$

它代表了下图中带阴影的面积.



计算积分我们有

$$\int_0^\beta \frac{1}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}\mathrm{d}x = -\left(x-\frac{3}{4}\right)^{-1}\Bigg|_0^\beta$$

$$= \frac{-1}{\beta-\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}.$$

当取 $\beta \to 3/4$ 的极限时,我们得到

$$\lim_{\substack{\beta\to\frac{3}{4}\\ \beta<\frac{3}{4}}}\int_0^\beta \frac{1}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\beta\to\frac{3}{4}\\ \beta<\frac{3}{4}}}\left(\frac{-1}{\beta-\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\right) = \infty.$$

由此知道原来的积分(即那个无限长的竖直条的面积)确实为无穷大.

记住这些例子后,我们现在便可以给出反常积分的正式定义.

定义 *一个积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是反常的是说,要么 a 或 b 等于 $\pm\infty$,要么函数 $f(x)$ 在某些点 $x=c, a\leqslant c\leqslant b$ 等于 $\pm\infty$.*

我们已经讨论过如何在 $b=\pm\infty$ 时赋与这样的积分一种意义:

$$\int_a^{\pm\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to\pm\infty}\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\int_{\pm\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的情况可化到上面情形,这是因为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. 情形

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

能够化成上面看到的那种积分之和,这只要把无穷区间 $-\infty < x < \infty$ 在某个点

c 分割开：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

我们现在专注于 $f(c) = \pm\infty$ 的情形，其中 c 为区间 $a < c < b$ 中某个数. 由对函数 $y = \dfrac{1}{\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2}$ 分析的启发，我们知道如果 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 有限，则它可以表示为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由定义，出现在右边的积分必定分别等于下面的极限：

$$\lim_{\substack{\beta\to c\\ \beta<c}}\int_a^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \lim_{\substack{\beta\to c\\ \beta>c}}\int_{\beta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此我们以下述定义表明其正当性：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\beta\to c\\ \beta<c}}\int_a^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\substack{\beta\to c\\ \beta>c}}\int_{\beta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17.5}$$

注　仍有两种要考虑的特殊情形：

(1) 有许多个点 $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_k < b$ 使函数变为无穷大.

(2) 函数在区间的一个端点变为无穷大.

在这两种情形积分都可经分析得到类似于(17.5)的公式. 在第一种情形中，我们选取点 $a < c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \cdots < d_{k-1} < c_k < b$，使 $f(d_i)$ 为有限. 于是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{d_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots +$$

$$\int_{d_{k-1}}^{c_k} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_k}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

而上面积分中的每一个都可经适当的极限计算求得.

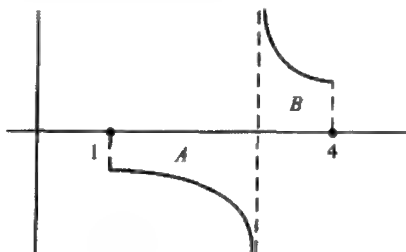
在最后一个情形中，即函数在区间的一个端点变为无穷大，譬如 $f(a) = \infty$，此积分可以用另一个极限进行计算：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\beta\to a\\ \beta>a}}\int_{\beta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 17.13　计算积分

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^{1/3}}.$$

当画出曲线 $y = (x-3)^{-\frac{1}{3}}$ 时，我们发现了在 $x = 3$ 的一条竖直渐近线.



因此

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x-3)^{\frac{1}{3}}} = -\text{面积}(A) + \text{面积}(B)$$

$$= \int_1^3 \frac{dx}{(x-3)^{\frac{1}{3}}} + \int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \lim_{\substack{\beta\to 3\\ \beta<3}} \int_1^\beta \frac{dx}{(x-3)^{\frac{1}{3}}} + \lim_{\substack{\beta\to 3\\ \beta>3}} \int_\beta^4 \frac{dx}{(x-3)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \lim_{\substack{\beta\to 3\\ \beta<3}} \frac{3}{2}(x-3)^{\frac{2}{3}} \Big|_1^\beta + \lim_{\substack{\beta\to 3\\ \beta>3}} \frac{3}{2}(x-3)^{\frac{2}{3}} \Big|_\beta^4$$

$$= -\frac{3}{2}(-2)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}\cdot 1$$

$$= \frac{3}{2}(1-2^{\frac{2}{3}}).$$

注意最后的答案为负表明面积(A) > 面积(B) 这个事实.

§ 17.5 的习题

对于下面的每个反常积分用你的 CAS 画出所表示的面积,在其中以一个大的数代替无穷大.确定此积分是有限还是无穷.如果为有限算出它的值.

(1) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^3}$.　　(2) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}}$.　　(3) $\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}$.

(4) $\int_2^4 \frac{dx}{(x-3)^3}$.　　(5) $\int_1^\infty xe^{-x}dx$.　　(6) $\int_2^\infty \frac{x}{x+\cos(x)}dx$.

(7) $\int_1^\infty \frac{e^{2-x}}{(x-2)^2}dx$.　　(8) $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.　　(9) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

(10) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+2x}$.　　(11) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.　　(12) $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{3}{4}}}$.

(13) $\int_1^3 \frac{dx}{x-1}$.　　(14) $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{3}{4}}}$.

对下列的每个反常积分用你的 CAS 画出积分所表示的面积. 确定此积分是有限还是无穷. 不要去计算它的值. 提示:在试图计算 $\int_1^3 \frac{e^{x^2}}{(x-1)^2}dx$ 时注意有 $e < e^{x^2} < e^9$ 对 $1 \leqslant x \leqslant 3$ 成立. 因此

$$e\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2} < \int_1^3 \frac{e^{x^2}}{(x-1)^2}dx < e^9\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

由于 $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ 是无穷大,我们便能推断出 $\int_1^3 \frac{e^{x^2}}{(1-x)^2}dx$ 也是无穷大.

(15) $\int_{10}^{20} \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x-10}}dx$.　　(16) $\int_1^5 \frac{x^{50}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}dx$.

(17) $\int_1^6 \frac{\ln(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}}{(x-3)^5}dx$.　　(18) $\int_{-1}^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt[3]{x}}dx$.

(19) 证明对 $x \geqslant 1, e^x > x^2$.

(20) 证明对 $x \geqslant 6, e^x > x^3$. 提示:在你的 CAS 上计算 $\frac{e^5}{5^3}$,然后证明 e^x/x^3 的一阶导数在 $x \geqslant 5$ 为正,从而知在 $x \geqslant 5$ 它是个增函数.

(21) 证明对任意 $p > 0, e^x > x^p$ 对充分大的所有 x 均成立. 利用(21),下列哪一个反常积分为有限.

(22) $\int_1^\infty \frac{e^x}{x^{1000}}dx$.　　(23) $\int_1^\infty x^{1000}e^{-x}dx$.

(24) $\int_1^\infty x^{1000}e^{-\sqrt{x}}dx$.　　(25) $\int_1^\infty \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{x^{1000}}dx$.

(26) 定义 $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du$. $\Gamma(1)$ 是什么?证明此积分对 $x > 0$ 收敛. 用分部积分证明 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x \geqslant 1$. 推断对所有正整数 n 有 $\Gamma(n+1) = n!$.

第十七章的附加习题

计算下列积分并用你的 CAS 检验你的答案.

(1) $\int \frac{dx}{\sin(x) - 3\cos(x)}$.　　(2) $\int \frac{dx}{\sin(x) + \tan(x)}$.

(3) (a) 求常数 a, b 使 $x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$.

(b) 用(a) 中结论证明 $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx = \pi/8$.

(4) 求常数 A_1, B_1, C_1, B_2, C_2 使得

$$\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+3}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+3)^2}.$$

利用此结果计算$\int\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}\mathrm{d}x$.

(5) 计算$\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$. **提示**:令 $y=\arctan(x)$ 并解出 x. 用你的 CAS 画出此区域.

(6) 计算$\int\sqrt{1+\exp(x)}\,\mathrm{d}x$. **提示**:令 $u^2=1+\exp(x)$.

(7) 计算$\int_1^3\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\mathrm{d}x$.

(8) 一个城市有一块长方形的大小为800英尺×300英尺的地皮,短边的一头濒临大海. 当我们从大海移开时人口密度由 $\delta(x)=500-\sqrt{x}$ 给出. 计算总人口. **提示**:在一个宽为 Δx 的中心在 x_0 的长方形,如果高度为300,则总人口约为 $\delta(x_0)\cdot 300\cdot\Delta x$.

(9) 用你的 CAS,画出由曲线 $y=\ln(x)$ 和 $y=-\frac{1}{e}x+2$ 以及 x 轴围成的区域. 求此区域的面积. **提示**:对变量 y 积分.

(10) (a) 首先用求反导数的方法计算$\int_1^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) 用替换 $x=\exp(y)$ 再次计算同一积分.

用你的 CAS 进行必要的长除并将下列有理函数写成(17.2) 的形式.

(11) $\frac{x^4+x^2-2}{x^3+3x+1}$.

(12) $\frac{3x^4+12x-2}{x^2+1}$.

(13) $\frac{x^{14}-x^{12}+2x^{10}+x^8+2x^6-x^4+1}{3x^3+2x+1}$.

(14) $\frac{x^{16}+6x+2}{x^3-6}$.

用你的 CAS 分解多项式为因式并进行必要的长除. 然后计算下列积分

(15) $\int\frac{x^5+2x^3+x^2-3x-1}{x^3+3x+1}\mathrm{d}x$.

(16) $\int\frac{3x^4+12x-2}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

(17) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-3x^2-4}$.

第十八章　无穷级数

18.1　几何级数

作为这章的引言让我们仔细思考一下芝诺的悖论，它说，在数直线上不可能从0走到1.



支持这个论点的论证是这样进行的：在从0走到1你必须经过中点1/2，然后再经过$\frac{1}{2}$与1的中点即3/4，等等. 由于有无穷多个中点要经过，所以你永远达不到点1.

我们如何驳斥这个论证（毕竟走在任何两点之间都是可能的）？首先回忆（如同在 §17.5 中看到的）

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1.$$

假定数直线上0与1之间的距离为1英寸而我们前进的速度是每秒1英寸，于是到达点1/2要花1/2秒. 相似地，从1/2到3/4要花1/4秒，如此继续下去，总的从中点到中点到中点等等的时间是和数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots, \tag{18.1}$$

我们知道它是 1 秒.

这个看似简单的问题事实上已把我们引向了下面的真正深刻的启示.

启示　把无穷多个数加起来并且得到一个有限和数,这是可能的.

无限和(18.1)是**几何级数**的一个简单例子.这种级数的另一个例子是

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots. \tag{18.2}$$

提问　和(18.2)是有限的吗?如果是,其值是什么?

回答　我们声称,使用我们的 CAS,能够证明

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots=\frac{1}{2}.$$

我们从计算头几项和着手:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=\frac{13}{27},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}=\frac{40}{81}.$$

有什么模式吗?敏锐的目光(还有一点处理求和的经验)告诉我们

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{3^N}=\frac{(3^N-1)/2}{3^N} \tag{18.3}$$

你能证明它吗?**提示**:用归纳法.

公式(18.3)允许我们对此无穷级数求和:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots&=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{3^N}\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{(3^N-1)/2}{3^N}\\&=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^N}\right)\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

定义　设 $-1<r<1$,并说 a 为一任意的固定数.一个首项 a 和公比 r 的**几何级数**是一个无限和

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots.$$

注 在上面的定义中，r是个常数因子，每项乘以这个因子便得到了其后续项. 运用求和符号$\sum$我们能方便而紧凑地用首项a和公比r表示为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n。$$

例 18.1 首项 3 公比 $-1/7$ 的几何级数为

$$3-\frac{3}{7}+\frac{3}{49}-\frac{3}{343}+\cdots$$

注 如果$|r|>1$，则$|r^n|$当$n\to\infty$时会越来越大，因此此时几何级数永不会有限.

命题 18.2 如果$|r|<1$，则几何级数由

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n = \frac{a}{1-r}.$$

证明(形式的) 只要证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

就够了，这是因为我们可以用a乘此方程两边得到一般的结果. 形式地有

$$\begin{aligned}
&(1-r)\cdot(1+r+r^2+r^3+\cdots)\\
&=1\cdot(1+r+r^2+r^3+\cdots)-r\cdot(1+r+r^2+r^3+\cdots)\\
&=(1+r+r^2+r^3+\cdots)-(r+r^2+r^3+\cdots)\\
&=1.
\end{aligned}$$

于是对方程

$$(1-r)\cdot(1+r+r^2+r^3+\cdots)=1$$

的两边除以$(1-r)$我们得到所希望的结果.

如何能使上面的证明严格?为什么这个证明当$|r|>1$行不通?在 §18.2 中会看到答案.

例 18.3 将无限循环小数展开式

$$c=2.713\,713\,713\,713\cdots$$

表示为一个有理数.

由定义我们有

$$c=2+\frac{713}{10^3}+\frac{713}{10^6}+\frac{713}{10^9}+\frac{713}{10^{12}}+\cdots.$$

因此$c-2$是个几何级数，其首项$a=713/10^3$，公比为$1/10^3$. 命题 18.2 告诉我们

$$c-2=\frac{713}{10^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{10^3}\right)}=\frac{713}{999},$$

故我们最后有

$$c=2+\frac{713}{999}=\frac{2711}{999}.$$

§18.1 的习题

求下列几何级数的和. 用你的 CAS 求此级数的许多项之和,以确认你的答案.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot 3^{-n}$.　(2) $\sum_{n=3}^{\infty}2\cdot 3^{-2n}$.　(3) $\sum_{n=2}^{\infty}5\cdot 4^{-n}$.

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3}{4}\right)^n$.　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$.　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{-3n}$.

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}4\cdot 5^{-2n+2}$.　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-5}{7}\right)^{n-2}$.　(9) $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}$.

把下列的无限循环小数展式表示为有理数(整数的比). 横杠表示循环节.

(10) $0.\overline{35}=0.35\,35\,35\cdots$.　(11) $0.\overline{129}=0.129\,129\,129\cdots$.

(12) $2.\overline{17}=2.17\,17\,17\cdots$.　(13) $5.\overline{621}=5.621\,621\,621\cdots$.

(14) 对 x 的哪些级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\cos(x))^n$ 收敛?如果它收敛其和是什么?

(15) 对 x 的哪些值级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(e^x)^n$ 收敛?如果它收敛其和是什么?

(16) 对 x 的哪些值级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln(x))^n$ 收敛?如果它收敛其和是什么?

(17) 一只网球从 15 英尺高处落下. 这里是完全真空的,故它反弹至原来落下处高度的 4/5,并且无限制地这样继续下去. 计算它通过的总距离. 在 50 次反弹后它通过了多长的距离?

18.2　一般的无穷级数

设 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 为无穷实数序列. 一个**无穷级数**(或简单地,**级数**)是无穷和

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots.$$

对 $N\geqslant 1$,我们定义上面级数的第 N 个部分和为

$$S(N)=\sum_{n=1}^{N}a_n.$$

定义 如果$\lim\limits_{N\to\infty}S(N)$存在并等于$s$则我们说此**无穷级数收敛于**$s$;否则我们说此级数**发散**.

注 我们说一个无穷级数收敛指 的是它收敛于一个有限数,并且如果那个有限数是s,我们则说此和收敛于s.

问题 给出一个收敛的无穷级数和一个发散级数的例子. 几何级数

$$1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{r-1},$$

对$|r|<1$收敛. 部分和就是

$$S(1)=1=\frac{1-r}{1-r},$$

$$S(2)=1+r=\frac{1-r^2}{1-r},$$

$$S(3)=1+r+r^2=\frac{1-r^3}{1-r},$$

…………

$$S(N)=1+r+r^2+\cdots+r^N=\frac{1-r^{N+1}}{1-r},$$

因此当$|r|<1$,$N\to\infty$时$r^{N+1}\to 0$,我们有

$$\lim_{N\to\infty}S(N)=\lim_{N\to\infty}\frac{1-r^{N+1}}{1-r}=\frac{1}{1-r}.$$

当$|r|>1$,我们看出上面的级数发散. 注意这个论证给出了 §18.1 提出的问题的一个严格的解答.

问题 能举一个非常熟悉的无穷级数吗?

这个问题的答案可能是$\pi=3.14159\cdots$. 当我们思考小数展开式到底意味着什么时,我们看到实际上

$$\pi=3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{9}{100000}+\cdots,$$

它显然是个无穷级数. 事实上每个无理数都是一个无穷级数. 记住一个 CAS 不能存储一个数的无穷序列$a_1,a_2,a_3,\cdots$是重要的. CAS 能够和无理数打交道并且能近似它们到任意的精度(这等于是计算一个部分和).

关于无穷级数能问的最关键的问题是:

问题 如何决定一个无穷级数是收敛的还是发散的?

在正面着手解决这个问题之前(本章的其余部分一直环绕着此问题的回答),让我们自己相信每个实数的无限小数展开式(如像398.213 715 023…)是一个收敛的无穷级数.

考虑展开式 $a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots$,其中 a_0 为任意整数而 $a_n(n=1,2,3,\cdots)$ 是0与9之间的任一整数. 于是由定义,

$$a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots = a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\frac{a_3}{1\ 000}+\frac{a_4}{10\ 000}+\cdots.$$

对 $N\geqslant 1$,此级数的第 N 个部分和 $S(N)$ 是

$$\begin{aligned} S(N) &= a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_N}{10^n} \\ &\leqslant a_0+\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots+\frac{9}{10^N} \\ &< a_0+1, \end{aligned}$$

这是因为几何级数 $\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots$ 收敛于1. 我们最后得知部分和的序列非降的且每项严格小于 a_0+1. 在一般情形中,任意满足这些特定条件的序列必有一个极限,而我们的序列正是如此.

18.3 积分判别法

设 $f(x)$ 为一正的递降函数,其中 $x\geqslant 1$. 于是必有

$$f(1)>f(2)>f(3)>\cdots.$$

我们可以叙述第一个收敛判别法.

积分判别法 如果 $f(x)$ 是个正的递降函数,并对 $x\geqslant 1$ 可积,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

收敛当且仅当

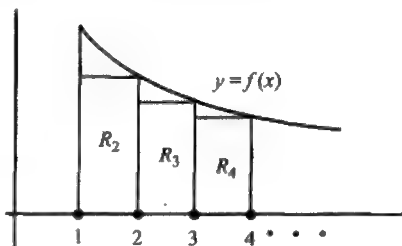
$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛.

证明 假定此积分收敛. 于是在下图中每块矩形 $R_2,R_3,R_4,\cdots$ 的面积由

$$面积(R_2)=f(2)\cdot(2-1)=f(2),$$

$$面积(R_3)=f(3)\cdot(3-2)=f(3),$$



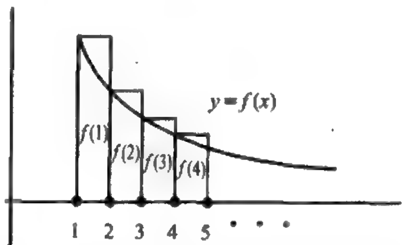
$$\text{面积}(R_4) = f(4) \cdot (4-3) = f(4),$$

....

给出. 由于所有这些面积的和严格小于此曲线与 x 轴(对 $x \geqslant 1$) 之间的面积,我们立即明白

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) < \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

反之,如果 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛,则我们看出在下图中曲线和 x 轴(对 $x \geqslant 1$) 之间的面积小于所有这些矩形面积的和,因而



$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

例18.4 对哪些 p 的值,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

收敛?

由积分判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛当且仅当 $\int_1^{\infty} \mathrm{d}x/x^p$ 收敛. 考虑此积分时发现有两种情形:

情形 1 当 $p = 1$ 时积分为

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{B \to \infty} \int_1^{B} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{B \to \infty} \ln(B) = \infty,$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

情形 2 当 $p \neq 1$ 时积分为

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} &= \lim_{B \to \infty} \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \\
&= \lim_{B \to \infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^B \\
&= \lim_{B \to \infty} \left(\frac{B^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right).
\end{aligned}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛而 $p \leqslant 1$ 时发散.

例 18.5　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$$

收敛吗?

我们必须检查积分

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{n^2+4} dx$$

是否收敛. 此积分可以用换元 $u = x^2 + 4, du = 2x dx$ 计算如下:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+4} dx &= \lim_{B\to\infty}\int_1^{B} \frac{x}{x^2+4} dx = \lim_{B\to\infty}\int_5^{B^2+4} \frac{1}{u}\frac{du}{2} \\ &= \lim_{B\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(u)\Big|_5^{B^2+4}\right) \\ &= \lim_{B\to\infty}\frac{1}{2}(\ln(B^2+4) - \ln(5)) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

因此,和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ 发散.

§18.3 的习题

用积分判别法确定下列无穷级数哪一个收敛. 以你的 CAS 对此级数作多项求和以确认你的答案.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$.　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15}{n^{1.01}}$.　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n+1}$.　(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$.　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+3}$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.　(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n)$.　(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$.　(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$.　(12) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(n))^2$.

(13) 设 $S(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. 证明 $\ln(N+1) < S(N) < 1 + \ln(N)$.

(14) 证明 $\sum_{n=1}^{10^{10}} \frac{1}{n} < 25$.

18.4 其他的收敛判别法

判别收敛性的最简单也最强有力的方法之一是把一个级数与另一个级数作比较.

比较判别法 如果$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$为无穷级数,$0 < a_n \leqslant b_n, n = 1,2,3,\cdots$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{18.4}$$

由不等式(18.4)我们推断出:

(i) 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛于某个数S,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛于某个数$\leqslant S$,

(ii) 如果$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$必然发散.

例 18.6 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 3}$$

收敛.

因为$\frac{1}{n^2 + n + 3} < \frac{1}{n^2}, n \geqslant 1$,故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

因而由比较判别法知道,左边的和收敛.

例 18.7 证明$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 3} < 2.$

上面的讨论说明只需证明$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$就行了. 由积分判别法我们知道

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^{\infty} = 1,$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

例 18.8 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 3}$$

收敛还是发散?

这时可以把我们的级数与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

作比较,我们知道它是个收敛级数. 事实上,由于 $n^4 + 3 > n^4$,有

$$\frac{n}{n^4 + 3} < \frac{n}{n^4}.$$

已知的最有用的判别法之一是**比值判别法**,我们现在来叙述它.

比值判别法　设 $a_n > 0, n = 1,2,3,\cdots$. 如果

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = L$$

存在,那么如果 $L < 1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;如果 $L > 1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;如果 $L = 1$,此判别法没有提供任何信息.

例 18.9　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n}$$

收敛吗?

这里 $a_n = \frac{n^7}{2^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^7}{2^{n+1}}$,它们的商由

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^7/2^{n+1}}{n^7/2^n} \\ &= \frac{(n+1)^7}{n^7} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^7 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^7 \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

给出. 因此

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

由于此极限小于 1,比值判别法告诉我们此级数收敛.

例 18.10 利用比值判别法确定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

是否收敛.

且不管此问题显见的复杂性,我们看到

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}},$$

因而

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} \\ &= \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n. \end{aligned}$$

但是

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

因此最后是

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

由此(见命题 8.7)有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

又因为$\frac{1}{e} < 1$,故此级数收敛.

提问 我们能用比值判别法确定

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

是否收敛吗?

回答 在此例题中 $a_n = 1/n^2, a_{n+1} = 1/(n+1)^2$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

因此比值判别法在此种情况没有提供任何有用的信息，我们必须寻找一些另外的方法来分析此级数（正如我们已经看到过的，积分判别法是合适的）.

比值判别法的证明 我们给出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L \tag{18.5}$$

而且 $L < 1$ 时的证明. $L > 1$ 的情形是相似的，留给读者. 我们从选一个数 l 使得 $L < l < 1$ 着手.（18.5）式告诉了我们对大的 n，商 a_{n+1}/a_n 与 L 非常接近. 因此我们可以选一个数 N 如此之大，使得对所有 $n \geqslant N$ 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < l,$$

可以将其重写为

$$a_{n+1} < la_n. \tag{18.6}$$

因为（18.6）式对所有 $n \geqslant N$ 成立，它对 $n = N$ 成立，因而

$$a_{N+1} < la_N.$$

类似地，当我们令 $n = N+1$ 时（18.6）产生了

$$a_{N+2} < la_{N+1},$$

当我们令 $n = N+2$，则得到

$$a_{N+3} < la_{N+2},$$

等等.

如果把头两个不等式 $a_{N+1} < la_N$ 和 $a_{N+2} < la_{N+1}$ 联合起来，我们得到

$$a_{N+2} < l^2 a_N.$$

再将这个不等式与 $a_{N+3} < la_{N+2}$ 联合起来，我们得到

$$a_{N+3} < l^3 a_N,$$

依这种方式继续下去我们得到

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< la_N, \\ a_{N+2} &< l^2 a_N, \\ a_{N+3} &< l^3 a_N, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

将这一连串的不等式的两边都加起来产生了下面关键的不等式：

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots < (1 + l + l^2 + \cdots)\cdot a_N.$$

注意到这不等式右端包含了几何级数$1+l+l^2+\cdots$. 由于几何级数只当$l<1$时收敛,我们推断

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \left(\sum_{n=1}^{N-1} a_n\right) + (a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots)$$
$$< \left(\sum_{n=1}^{N-1} a_n\right) + (1 + l + l^2 + \cdots) \cdot a_N$$

仅当$l<1$时收敛;证完.

§18.4 的习题

确定下列级数中哪一个收敛. 用你的 CAS 作级数的多项和以确认你的答案.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+2n}$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$. (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)\right)^2}{n^2+1}$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{n^2}{3}\right)\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$. (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-3}$. (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^{100}}$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{4^n}$. (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$. (9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$.

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$. (11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^3}{n!}$. (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos(\sqrt{n}\cdot\pi))^2 \cdot 3^n}{n!}$.

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{n!}$. (14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$. (15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{(1.01)^n}$.

18.5 具正项和负项的无穷级数

我们现在的注意力集中在无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,其中a_n或者是正的或者是负的. 这类级数的简单例子有

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \cdots \qquad (18.7)$$

和

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots \qquad (18.8)$$

定义 一个级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$被称做绝对收敛是指如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛.

例 18.11　确定级数(18.7)和(18.8)是否绝对收敛.

因为$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$发散(我们曾用积分判别法看到),所以$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$不是绝对收敛的. 另一方面,我们已知$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots$收敛,因此$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\cdots$是绝对收敛的.

在下面定理中可以看出研究绝对收敛的动机.

定理 18.12　如果$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,即绝对收敛性蕴含了通常的收敛性.

证明　初看起来比较判别法好像是个合适的工具. 这里的唯一障碍是比较判别法只能用于由正项组成的级数. 为了把我们自己调整到能够使用比较判别法的情况,定义下面的正项级数. 设

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$$

为无穷级数,其中

$$a_n^+=\begin{cases}a_n & \text{如果 } a_n\geqslant 0,\\ 0, & \text{如果 } a_n<0;\end{cases}$$

以及

$$a_n^-=\begin{cases}0, & \text{如果 } a_n\geqslant 0,\\ -a_n, & \text{如果 } a_n<0.\end{cases}$$

由定义,$a_n^+,a_n^-\leqslant|a_n|$,因此与$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$进行比较知道级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$必定都收敛. 最后注意到

$$a_n=a_n^+-a_n^-$$

便完成了证明,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛于

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-\right).$$

定理 18.12 让我们重新叙述比值判别法,使得它可应用于既有正项又有负项的级数.

广义比值判别法　设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为一个一般的级数使得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

存在. 如果 $L < 1$,则此级数绝对收敛;如果 $L > 1$,则此级数发散;而如果 $L = 1$,则此判别法没有给出任何信息.

例 18.13 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^2}{3^n}$$

绝对收敛吗?

我们计算所要的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|(-1)^{n+2}(n+1)^2/3^{n+1}|}{|(-1)^{n+1}n^2/3^n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

因此我们得出此级数绝对收敛的结论.

现在我们转而注意级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

这个级数收敛吗?为解决此问题,我们先在 CAS 上作些试验. 设

$$S(N) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

代表此级数的前 N 项之和. CAS 告诉我们

$$\begin{aligned}
S(1) &= 1,\\
S(2) &= 0.5,\\
S(5) &= 0.783\,33\cdots,\\
S(10) &= 0.645\,63\cdots,\\
S(100) &= 0.688\,17\cdots,\\
S(1000) &= 0.692\,65\cdots.
\end{aligned}$$

这个序列确乎是收敛的. 回想此级数不是绝对收敛的,这使我们有了制定下面定义的念头.

定义 如果一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 却不收敛,则称此级数为**条件收敛**.

问题 级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$ 条件收敛吗?

答案原来与我们凭经验得来的直觉是一致的:此级数的确收敛. 由于上面

这个级数中各项的符号交替变化(从正变到负),这些级数被称做**交错级数**. 下面这个有名的定理让我们能分析一大类不是绝对收敛的交错级数.

定理 18.14 *如果交错级数* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *(其中的项* $a_n \geqslant 0$*) 满足*

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots \to 0,$$

则此级数收敛,即若级数的项 a_n *递减并当* $n \to \infty$ *时趋向于零,则此级数收敛.*

证明 还是以考虑部分和

$$S(N) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}a_n$$

着手我们的证明.

我们断言

$$0 < S(2) < S(4) < S(6) < S(8) < \cdots \qquad (\text{I})$$

和

$$S(2m) < a_1, \text{其中 } m = 1,2,3,\cdots. \qquad (\text{II})$$

为了证实(Ⅰ),注意有

$$S(2m) = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

由于数序列 a_n 当 n 越来越大时减少至 0,于是我们知道

$$(a_1 - a_2), (a_3 - a_4), (a_5 - a_6), \cdots$$

中每一项都是正的,因而(Ⅰ)成立. 另一方面,我们重新安排此和便得到了(Ⅱ):

$$S(2m) = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-1} - a_{2m-2}) - a_{2m} < a_1.$$

由此得知部分和 $S(2m)$ 形成一个增加序列,它的每一项以 a_1 为上界(即小于 a_1). 它们因而必定趋向一个极限 s. 为完成证明我们考虑差

$$S(2m+1) - S(2m) = (-1)^{2m+2}a_{2m+1}.$$

由于当 $n \to \infty$ 时此差趋向 0,我们得出部分和 $S(2m+1)$ 的序列也收敛于极限 s.

例 18.15 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

收敛吗?

由于

$$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \cdots \to 0$$

故此级数条件收敛.

注 例18.15中的级数收敛得一点也不能,这可通过CAS计算此级数的前 N 项之和看出. 仍以 $S(N)$ 表前 N 项和,则 $S(10)=0.450\ 73\cdots$, $S(100)=0.555\ 02\cdots$, $S(1000)=0.589\ 09\cdots$.

§18.5 的习题

确定下列级数中哪一个绝对收敛或条件收敛. 用你的CAS求此级数的多项和. 指出你使用了哪一个收敛性判别法.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{-5}{8}\right)^n$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}$. (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+4}$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)\cdot n^5}{3^n}$. (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{n!}$. (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot e^n}{n^{100}}$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15n^{\frac{1}{4}}}{n^2+1}$. (8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^{\frac{3}{2}}+2}$. (9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^{15}}$.

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)}$. (11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)}{n^4}$. (12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)^n}{n^{3n}}$.

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{3^{2n}}$. (14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln(n)}}$. (15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$.

18.6 幂级数

幂级数是一个形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

的无穷级数,其中 x 为变量,数 a_n 为固定的实数.

例 18.16 无穷和

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

是个幂级数.

提问 对于哪些 x 值,一般幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛?

回答 尽管没有对此问题的一个包罗一切的答案,但广义比值判别法通常会提供一个回答. 如果极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\lim_{n\to 0}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|$$

存在，则我们会找到一个 x 值的区间，在此区间上此幂级数收敛.

例 18.17　对 x 的哪些值幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n}$$

收敛?

当我们计算出现在广义比值判别法中的极限时，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}}\right|\Big/\left|\frac{(-1)^nx^n}{3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{3}=\frac{|x|}{3}.$$

因此当 $|x|<3$ 时此级数收敛.

定义　如果一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 对 $|x|<R$ 绝对收敛，则我们定义(最大的这种) R 为此幂级数的**收敛半径**.

警示　存在幂级数，譬如 $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$，只在 $x=0$ 时收敛. 这时我们说收敛半径为0.

例 18.18　证 $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$ 的收敛半径为零.

我们又一次运用广义比值判别法：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|(n+1)x|=\begin{cases}0, & \text{如果 } x=0,\\ \infty, & \text{其他,}\end{cases}$$

因此此级数仅在 $x=0$ 收敛.

现在考虑一个一般的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

其收敛半径 $R>0$. 于是对每个 x, $|x|<R$，无穷级数收敛于值 $f(x)$，从而定义了一个函数 $f(x)$. 当我们(逐项) 对 $f(x)$ 微分便得到了

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots,$$

或更加简洁地

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

(应该注意,我们略去了取此级数导数的正当性的详细阐述.)自然要问$f'(x)$什么时候收敛.

定理 18.19 *考虑幂级数*$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$*和它的导数*$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$.*如果*$f(x)$*具收敛半径*$R$*则*$f'(x)$*也有收敛半径*$R$.

证明 定理由广义比值判别法连同下面小小的观察

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

得到.设R'是$f'(x)$的收敛半径.我们由下面的计算算出R':

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}x^n}{na_nx^{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right|.$$

然而后面的这个极限是我们对$f(x)$的级数应用广义比值判别法时出现的极限一样.因此$R=R'$.

例 18.20 求函数$\frac{1}{(1-x)^2}$的幂级数.什么是其收敛半径.

如果首先让$f(x)=\frac{1}{1-x}$,则我们知道

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots,$$

其收敛半径为1.因为$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$,我们找到一个此函数的级数展开式

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots.$$

定理18.19规定了收敛半径还是1.

最后,如果

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

是一幂级数,我们可以逐项积分(仍然省略了某些证明的细节)得

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)+C,$$

其中C为积分常数.另外的选择是,我们写成

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=C+a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_3x^3}{3}+\frac{a_4x^4}{4}+\cdots.$$

注意,这个新级数的收敛半径与原级数的一样(类似于定理18.19).

例 18.21　对$\dfrac{1}{x-1}$积分得到 $\ln(1-x)$ 的幂级数.

如前,我们有

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

而积分给予我们

$$\int\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=C+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots.$$

因为$\int\dfrac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)+C$,我们有

$$-\ln(1-x)=C+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\cdots.$$

在方程两边取 $x=0$ 看到

$$-\ln(1)=0=C,$$

因此

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots,$$

从而完成了这个例题.

§ 18.6 的习题

求下列每个幂级数的收敛半径.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$.　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n+1}$.　(3) $\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$.

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{1000}}$.　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n}$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$.　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n^3}$.　(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{2^n}$.

下面的每个幂级数对 $|x|<1$ 都收敛. 决定在点 $x=\pm1$ 级数是发散,绝对收敛,还是条件收敛?

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.　(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.　(12) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$.

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^2}{2^n}$.　(14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{1.01}}$.　(15) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln(n)}$.

(16) $\dfrac{1}{1-x^2}$ 的幂级数由$\dfrac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$ 给出. 计算$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{1}{1-x^2}$和$\int\dfrac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ 并求出它们的幂级

数.

(17) 求$\frac{1}{1+x^2}$的幂级数. 计算$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2}$并求其幂级数. 求 $\arctan(x)$ 的幂级数.

(18) 求$\frac{1}{1-x^4}$的幂级数. 计算$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x^4}$并求其幂级数. 求$\int\frac{dx}{1-x^4}$的幂级数.

第十八章的附加习题

(1) 证明如果$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n$和$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}b_n$都存在,则

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n+b_n)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}b_n.$$

(2) 称级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为柯西级数是说,如果对每个$\varepsilon>0$存在一个数N使得对所有的$m,n>N$有

$$\left|\sum_{i=n}^{m}a_i\right|<\varepsilon.$$

证明一个柯西级数收敛. 其逆是否也对?

借助于你的 CAS 检验下列级数是否是柯西的.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}$.　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+1}$.　　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$.　　(7) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}$.

(8) 一个无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}b_n,b_n\neq0$被称为收敛是说如果序列$p_n=\prod_{i=1}^{n}$收敛且$\lim_{n\to\infty}p_n\neq0$.

(a) 证明如果$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)<\infty$,则$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)<\infty$.

(b) 对$a_n\geqslant0$,证明$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)<\infty$当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$.

(9) 乘积$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$收敛吗?

对下列级数求和以及其收敛半径.

(10) $\cos^2(x)+\cos^4(x)+\cdots+\cos^{2n}(x)+\cdots$.

(11) $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2^2x^2}+\cdots+\frac{1}{2^nx^n}+\cdots$.

(12) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$.

(13) $3+18x+\cdots+3^nnx^{n-1}+\cdots$.

求下列级数的收敛半径.

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(\cos(x))^n$.

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(x))^n n^2$.

(18) $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(x))^n}{n!}$.

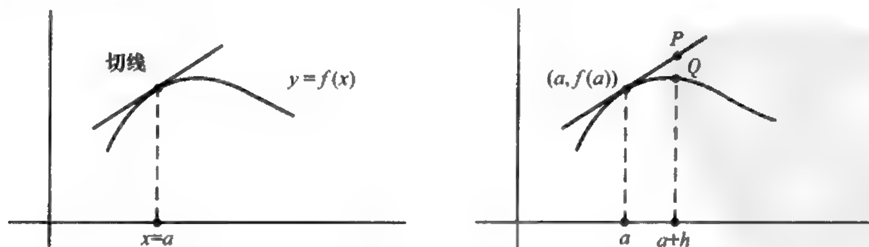
第十九章　泰勒级数

19.1　切线近似

设 $y=f(x)$ 为区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的可微函数. 它在 $x=a$ 的切线具有斜率 $f'(a)$，而此切线的方程由

$$y=f'(a)(x-a)+f(a) \tag{19.1}$$

给出. 由于靠近 a 的 x 值上切线非常接近曲线，我们可以按下面的方式用它来逼近我们的函数. 设 $x=a+h$，其中 h 是个小的数.



画在上右图中的点 P 在切线上，其坐标为$(a+h, f'(a)h+f(a))$. 而点 Q 在曲线自身上，有坐标$(a+h, f(a+h))$. 观察到当h小时点P非常接近Q这个事实，我们便得到了近似

$$f(a+h) \approx f'(a)h + f(a). \tag{19.2}$$

例 19.1　用(19.2)去近似 $\sqrt{10}$.

在近似公式(19.2)中. 设 $f(x)=\sqrt{x}, a=9, h=1$, 于是 $f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $f(9)=3, f'(9)=\frac{1}{6}$. 我们得到了

$$\sqrt{10} \approx \frac{1}{6}\times 1 + 3 = 3.1666\cdots.$$

例 19.2　用(19.2)近似 $\sqrt[3]{7.5}$.

设 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$. 于是 $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. 选取 $a=8, h=-\frac{1}{2}$, 有 $f(8)=2, f'(8)=\frac{1}{12}$, (19.2)产生了

$$\sqrt[3]{7.5} \approx -\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}+2 = 1.95833\cdots.$$

例 19.3　用一阶导数近似 $\cos(33°)$.

设 $f(x)=\cos(x)$, 于是 $f'(x)=-\sin(x)$. 选取 $a=\frac{\pi}{6}$ 和 $h=\frac{\pi}{60}$, 我们看到 $f(a)=\frac{\sqrt{3}}{2}, f'(a)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$. 所得到的近似值是

$$\cos(33°) \approx -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{60}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§19.1 的习题

用(19.1)的切线近似去近似在指出的点上的下列函数值. 用你的 CAS 算出实际值以检验你近似有多精确.

(1) $\sqrt{15.5}$.　(2) $\sqrt[3]{67}$.　(3) $\sqrt[5]{1.01}$.

(4) $\cos(62°)$.　(5) $\tan(34°)$.　(6) $\ln(0.9)$.

(7) $e^{3.2}$.　(8) $\sin(87°)$.　(9) $\cos(112°)$.

(10) $(1.01)^{100}$.　(11) $\ln(3)$.　(12) $\cosh\left(\frac{1}{4}\right)$.

19.2　以泰勒多项式近似函数

设 $f(x)$ 为一函数, 譬如 $\sin(x), \ln(x), e^x$ 等等. 一个 CAS 的最引人注目的特

点是它计算 $f(x)$ 到任意精度的能力. 例如，一个 CAS 可以计算 e^3, $\ln(2)$ 或 $\sin(\pi/8)$ 到 N 位精度，这里 N 是任意整数（当然如果 N 选得太大了，计算可能要花数年，这是不可行的）.

由于存在无穷多的函数，而 CAS 用户可以很快地计算几乎所有的函数到一百位精度，那么自然要问 CAS 是如何完成的. 有一点是清楚的，那就是 CAS 的设计者用了高度有效的近似算法. 在这节我们要考查一个简单的算法（其正当性将在后面给出），它将给出对任意满足下面两个性质的函数 $f(x)$ 的近似：

性质 1 *函数 $f(x)$ 在包含 0 的区间上无限可微.*

性质 2 *已知值*

$$f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(m)}(0),$$

并且这些值当 $m \to \infty$ 时不会随 m 过快地增长.

注 我们在这里提出的算法所基于的想法是将 $f(x)$ 换成一个无穷级数，然后用此级数的前面部分去近似 $f(x)$. 当此无穷级数收敛时此算法才能行得通. 正是由于这个理由，数值 $f(0), f'(0), f''(0), \cdots$ 不能够随意大. 一个能保证此算法成功的简单的增大条件是，假定存在一个常数 $c \geqslant 1$，使得 $|f^{(m)}(0)| < c^m \cdot m!$ 对 $m = 1, 2, \cdots$ 成立，其中回忆一下定义：$m! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (m-1) \cdot m$.

例 19.4 函数 $f(x) = e^x$ 满足性质 1 和 2. 事实上，e^x 可以微分要多少次就多少次. e^x 的所有导数都是 e^x，即 $f^{(m)}(x) = e^x$ 对所有 $m = 0, 1, 2, \cdots$ 成立. 另外，因为 $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = e^0 = 1$，故性质 2 十分明显.

例 19.5 多项式 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 满足性质 1 和 2. 我们有 $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$, $f'''(x) = 6$，以及 $f^{(m)}(x) = 0, m > 3$. 它的这些导数值容易被算出，$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -6$ 以及 $f^{(m)}(0) = 0, m > 3$.

掌握了这样一大类函数，我们用三个步骤来描述这个近似算法.

步骤 1 选取一个整数 $m > 0$ 并计算

$$f(0), f'(0), \frac{f''(0)}{2!}, \frac{f^{(3)}(0)}{3!}, \cdots, \frac{f^{(m)}(0)}{m!}.$$

步骤 2 构造多项式

$$p_m(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m.$$

称它为 **m 次泰勒多项式**.

步骤 3 对任意 x，有近似

$$f(x) \approx p_m(x).$$

注 一次泰勒多项式就是 §19.1 的切线近似.

例 19.6　我们能迅速地使用我们的算法去近似数 e. 设 $f(x) = e^x$，我们要去近似 $f(1) = e$.

步骤 1　选取 $m = 4$，我们立即看出

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2}, \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{6}, \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{1}{24}.$$

步骤 2　所要的 4 次泰勒多项式是

$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

步骤 3　令 $x = 1$，给出

$$e = f(1) \approx p_4(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \approx 2.708.$$

注意我们能利用这个算法去近似 e^2，

$$e^2 = f(2) \approx p_4(2) = 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} = 7.$$

例 19.7　为了近似 $\ln(1.5)$，我们设 $f(x) = \ln(1+x)$. 于是 $f'(x) = \frac{1}{1+x}$，$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$，$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$，而选取 $m = 3$，我们便能以 3 次泰勒多项式去近似 $f(0.5) = \ln(1.5)$.

步骤 1　这里的 $f(0) = \ln(1) = 0$，$f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$，

$$f''(0) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1, f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2.$$

步骤 2　泰勒多项式由 $p_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ 给出.

步骤 3　令 $x = \frac{1}{2}$ 我们得到

$$\ln(1.5) \approx p_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} = \frac{5}{12} \approx 0.416\,66\cdots.$$

例 19.8　作为此算法的最后一个例题我们近似 $\sqrt{2}$. 考虑 $f(x) = \sqrt{1+x}$. 于是 $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$，以及 $f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$.

选取 $m = 3$，我们可近似 $f(1)$：

步骤 1 这时$f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2}, f''(0)=-\frac{1}{4}$,以及$f'''(0)=\frac{3}{8}$.

步骤 2 三次泰勒多项式是$p_3(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}$.

步骤 3 最后我们得到近似

$$\sqrt{2}\approx p_3(1)=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=1.437\ 5.$$

注 m 完全由你选取. 较大的 m 值意味必须做更多的工作,而结果将是更加精确的近似.

问题 为什么这个算法可行?作为 m 的函数,我们能预测出此近似有多么精准吗?

对这些问题的回答构成了本章的剩余部分,而且它们引向了泰勒级数一般理论的展开. 这个结果是 CAS 用户可以用来迅速计算几乎任何自然存在的可微函数的强大工具.

§ 19.2 的习题

对下列的每一个函数求其 4 次泰勒多项式.

(1) e^{3x}. (2) $\cos(x)$. (3) $\sin(x)$.

(4) $\ln(1-x)$. (5) $\tan(x)$. (6) $\sqrt{1+x}$.

(7) $\sqrt[3]{1+2x}$. (8) $\cosh(x)$. (9) $\sinh(x)$.

用 1,2,3,4 次泰勒多项式在指出的点上近似下列函数. 用 CAS 计算的值去比较你的答案.

(10) e. (11) $\cos(58°)$. (12) $\sin(47°)$.

(13) $\ln(0.9)$. (14) $\tan(175°)$. (15) $\sqrt{1.1}$.

(16) $\sqrt[3]{9}$. (17) $\ln(3)$. (18) $\cosh\left(\frac{1}{4}\right)$.

19.3 麦克劳林级数

我们现在处于要给 § 19.2 提出的算法以一个正当理由的地步. 下面的定理是麦克劳林第一个发现的.

定理 19.9 设$f(x)$由下面的幂级数表示:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

它对某个 $R>0$ 在 $|x|<R$ 中绝对收敛. 于是它的系数由公式

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

给出.

证明　当计算

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

在 $x=0$ 的值时,一开始我们就看到

$$f(0) = a_0.$$

微分 $f(x)$ 一次并令 $x=0$ 得出

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$$

且

$$f'(0) = a_1.$$

按此方式继续进行,我们看到

$$f''(x) = 2a_2 + 3\times 2a_3x + 4\times 3a_4x^2 + \cdots$$

以及

$$f''(0) = 2a_2$$

或

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!}.$$

显然此步骤可无限次重复,并且在微分 $f(x)$ n 次之后我们得到

$$f^{(n)}(x) = (n!)a_n + ((n+1)n\cdots 2a_{n+1})x + ((n+2)\cdots a_{n+2})x^2 + \cdots.$$

令 $x=0$ 则给出所想要的结果:

$$f^{(n)}(0) = (n!)a_n.$$

称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

为 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**.

例 19.10　求 $f(x)=\sin(x)$ 的麦克劳林级数.

在此例题中求微分非常容易:

$$f'(x) = \cos(x),\quad f''(x) = -\sin(x),\quad f^{(3)}(x) = -\cos x,$$

而 $f^{(4)}(x)=\sin(x)$. 由此有

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad \frac{f''(0)}{2!}=0,\quad \frac{f^{(3)}(0)}{3!}=-\frac{1}{3!}$$

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=0,\quad \frac{f^{(5)}(0)}{5!}=\frac{1}{5!},\quad \frac{f^{(6)}(0)}{6!}=0,\quad \frac{f^{(7)}(0)}{7!}=-\frac{1}{7!}$$

等等. 因此 $\sin(x)$ 的麦克劳林级数是

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

我们已经求出的麦克劳林级数具有无穷大的收敛半径,即它对任意实数 x 收敛.

例 19.11 求 $\cos(x)$ 的麦克劳林级数.

微分 $f(x)=\cos(x)$ 给予我们 $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos(x)$, $f^{(3)}(x)=\sin(x)$ 等等. 因此我们有

$$f(0)=1, f'(0)=0, \frac{f''(0)}{2!}=-\frac{1}{2!}, \frac{f^{(3)}(0)}{3!}=0, \frac{f^{(4)}(0)}{4!}=\frac{1}{4!}, \cdots,$$

并且最终有

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

这里的级数又有无穷的收敛半径.

例 19.12 求 $\ln(1-x)$ 的麦克劳林级数.

在此最后一个例题中, $f(x)=\ln(1-x)$, $f'(x)=\dfrac{-1}{1-x}$, $f''(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, $f^{(3)}(x)=\dfrac{-2}{(1-x)^3}$, $\cdots$ 而对 $n>1$,

$$f^{(n)}(x)=\frac{-(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

因此,

$$f(0)=0, f'(0)=-1, \frac{f''(0)}{2!}=-\frac{1}{2}, \frac{f^{(3)}(0)}{3!}=-\frac{1}{3}, \frac{f^{(4)}(0)}{4!}=-\frac{1}{4}, \cdots,$$

我们得到了所需要的展开式,

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

注意,此级数对 $|x|<1$ 绝对收敛,当 $x=1$ 它发散,而且对 $x=-1$ 为条件收敛.

§19.3 的习题

对下列函数计算麦克劳林级数. 确定每个级数的收敛半径.

(1) e^{3x}.　　(2) e^{-x}.　　(3) $\cos(2x)$.

(4) $\ln(e+x)$.　　(5) $\frac{1}{1+2x}$.　　(6) $\frac{1}{1-3x}$.

(7) $\cosh(x)$.　　(8) $\sinh(x)$.　　(9) e^{x^2}.

(10) 10^x.　　(11) $\frac{1}{1-2x^2}$.　　(12) $(x-1)^3$.

19.4　二项式级数

考虑展开式

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

(这是熟知而初等的.)用我们的 CAS,很容易地得到展开式

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

无限地下去. 暂且专注于 $(x+y)^3$ 的展式. 如果我们对这表达式的两端除以 x^3,便看到

$$\frac{1}{x^3}(x+y)^3 = \left(1+\frac{y}{x}\right)^3 = 1 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^3.$$

这个等式解释了一个原理,即如果我们得到了展开式

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$

然后经一点代数处理,我们可以恢复 $(x+y)^3$ 的展开式.

对任意实数 r, $(1+x)^r$ 的展开式可以经计算函数

$$f(x) = (1+x)^r \tag{19.3}$$

的麦克劳林级数得到.

我们从计算下列各式开始:

$$f(0) = 1,$$

$$f'(0) = r(1+0)^{r-1} = r,$$

$$\frac{f''(0)}{2!} = \frac{r(r-1)(1+0)^{r-2}}{2!} = \frac{r(r-1)}{2!},$$

$$\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{r(r-1)(r-2)(1+0)^{r-3}}{3!} = \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} \tag{19.4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

为简化上面的系数,我们引进**二项式系数**$\binom{r}{n}$,它由下式定义:

$$\binom{r}{0} = 1, \tag{19.5}$$

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}, n = 1,2,3,\cdots.$$

这样做后,麦克劳林级数可由简洁公式

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n \tag{19.6}$$

给出.

注 称此为二项式级数. 如果 r 是个整数,则二项式系数

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}$$

对 $n > r$ 时为 0,从而(19.6) 中的和是有限的(像人们预料的那样).

例 19.13 求$(1+x)^3$ 的二项式级数.

事实上,我们返回到原来的公式:

$$\begin{aligned}(1+x)^3 &= \sum_{n=0}^{3}\binom{3}{n}x^n \\ &= \binom{3}{0} + \binom{3}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \binom{3}{3}x^3 \\ &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3.\end{aligned}$$

例 19.14 求$(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 的二项式级数.

这里的展开式是无限的(并不显然):用我们的一般公式:

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n \\ &= \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \cdots,\end{aligned} \tag{19.7}$$

因为

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1, \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2},$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}=-\frac{1}{8}, \tag{19.8}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}=\frac{1}{16},$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{4}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}=-\frac{5}{128},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

我们最后有

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots \tag{19.9}$$

§ 19.4 的习题

计算下列的二项式系数. 以你的 CAS 构造$\binom{r}{n}$来检验你的答案.

(1) $\binom{5}{2}$.　　(2) $\binom{2}{8}$.　　(3) $\binom{\frac{1}{3}}{2}$.　　(4) $\binom{\frac{1}{2}}{0}$.

(5) $\binom{-\frac{1}{2}}{4}$.　　(6) $\binom{-\frac{1}{3}}{3}$.　　(7) $\binom{0.21}{2}$.　　(8) $\binom{-3.21}{2}$.

(9) 求$(1+x)^{\frac{1}{3}}$, $(1+x)^{-\frac{1}{3}}$, $(1+x)^{2/3}$ 和$(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ 的二项式展开.

(10) 求$(1+x)^{0.23}$ 的二项式展开的前四项.

(11) 用$(1+x)^{\frac{1}{3}}$ 的二项式展开的前四项对$\sqrt[3]{2}$ 估值. 用前 50 项得到更好的近似.

(12) 用$(1+x)^{\pi}$ 的二项式展开前四项对 2^{π} 估值,使用近似值 $\pi\approx 3.14$. 用二项式展开的前 50 项连同更为精确的近似值 $\pi\approx 3.14159$ 得到 2^{π} 的更好的近似.

19.5　函数的泰勒近似中的误差估计

在 § 19.2 中我们给出了用一个 m 次泰勒多项式去近似一个函数$f(x)$ 的算法:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m. \qquad (19.10)$$

当 $m \to \infty$ 时这个近似有多好?值得注意的是,可以得出差

$$f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m\right)$$

的一个准确的以积分表示的公式. 对此积分估值后,我们便能有效地预测近似公式(19.10) 是如何精确的.

定理 19.15 *设 $f(x)$ 为一函数,它在区间 $|x| < A, A > 0$ 上 $(m+1)$ 次可微. 于是对任意满足 $|x| < A$ 的 x,我们有*

$$f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(m)}(x)}{m!}x^m\right) = \int_0^x f^{(m+1)}(t)\,\frac{(x-t)^m}{m!}\mathrm{d}t.$$

例 19.16 设 $f(x) = \mathrm{e}^x$. 于是 $f(t) = \mathrm{e}^t$, $f^{(m+1)}(t) = \mathrm{e}^t$ 对 $m = 1,2,3,\cdots$ 成立;由定理 19.15,我们有

$$\mathrm{e}^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}\right) = \int_0^x \frac{(x-t)^m}{m!}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$

在证明定理 19.15 之前,我们指出三个能用定理 19.15 来近似误差的情形. 应该注意到没有近似一个积分的一般方法,每个情形中的论证必须个别进行.

例 19.17 由

$$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

给出的对 e 的近似的精度如何?

如果在例 19.16 中令 $x = 1$ 我们有

$$\mathrm{e} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}\right) = \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$

现在对 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 我们有

$$\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} < 3$$

以及

$$(1-t)^m \leqslant 1.$$

这些简单的估值表明

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t < \int_0^1 3 \cdot \frac{1}{m!}\mathrm{d}t = \frac{3}{m!},$$

因此我们最后有

$$\mathrm{e} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!}\right) < \frac{3}{m!}.$$

例 19.18　计算 e 到 4 位小数.

为了 e 的近似值精确到 4 位小数,误差必须在 10^{-5} 之内,即我们必须选取 m 使得

$$\frac{3}{m!} < 10^{-5}.$$

这可由选 $m=8$ 来完成,因为 $8! = 40\ 320$ 而

$$\frac{3}{8!} = \frac{3}{40\ 320} < 10^{-5}.$$

用 CAS 快速计算表明

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \approx 2.718\ 3.$$

例 19.19　近似 $\sqrt{e}$ 到 3 位小数.

这里仍用例 19.16 的公式,以 $x = \frac{1}{2}$ 代入,看到

$$e^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!\cdot 2^2} + \frac{1}{3!\cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{m!\cdot 2^m}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2} - t\right)^m}{m!} e^t dt.$$

这时我们从极简单的估值

$$e^t \leqslant e^{\frac{1}{2}} < 2,$$

和

$$\left(\frac{1}{2} - t\right)^m < 2^{-m},$$

开始,其中 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$,并由此推出

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2} - t\right)^m}{m!} e^t dt < \frac{2\cdot 2^{-m}}{m!}\int_0^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2^m \cdot m!}.$$

所要的精度可由选取 m 得到,这个 m 使得

$$\frac{1}{2^m\cdot m!} < 10^{-4}. \tag{19.11}$$

$m = 6$ 将适合于我们的目标,最终有

$$\sqrt{e} \approx 1.649. \tag{19.12}$$

定理 19.15 的证明　对 m 进行归纳来证明此定理. $m = 0$ 的情形由微积分基本定理立即得到,

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \tag{19.13}$$

现在假定此定理对于 $k \leqslant m$ 已知,即当 $k \leqslant m$ 有

$$f(x)-\left(f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)=\int_0^x f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}\mathrm{d}t. \tag{19.14}$$

我们必须验证在 $k=m+1$ 时的定理. 用分部积分上面 $k=m$ 的最后面的那个积分得到

$$\begin{aligned}&\int_0^x f^{(k+1)}(t)\cdot\frac{(x-t)^k}{k!}\mathrm{d}t.\\&=-\frac{(x-t)^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m+1)}(t)\Big|_0^x+\int_0^x f^{(m+2)}(t)\cdot\frac{(x-t)^{(m+1)}}{(m+1)!}\mathrm{d}t. \qquad (19.15)\\&=\frac{x^{(m+1)}}{(m+1)!}f^{(m+1)}(0)+\int_0^x f^{(m+2)}(t)\cdot\frac{(x-t)^{(m+1)}}{(m+1)!}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

结合(19.14)和(19.15)产生了

$$\begin{aligned}&f(x)-\left(f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m+\frac{f^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}x^{m+1}\right)\\&=\int_0^x f^{(m+2)}(t)\cdot\frac{(x-t)^{m+1}}{(m+1)!}\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{19.16}$$

这验证了 $k=m+1$ 时的定理. 因此定理由归纳得证.

§19.5 的习题

计算下列的数到所要的精度. 用你的CAS计算适当的(具充分大 m 的) m 次泰勒多项式,选取 m 得到所要的精度.

(1) $\sqrt[3]{e}$ 到3位小数. (2) $\sqrt[3]{e}$ 到10位小数. (3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ 到3位小数.

(4) $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ 到10位小数. (5) $\sqrt{5}$ 到10位小数. (6) $\sqrt[3]{2}$ 到20位小数.

(7) $\ln(2)$ 到10位小数. (8) $\ln(3)$ 到50位小数. (9) $\cosh(2)$ 到10位小数.

(10) $5^{2.93}$ 到20位小数.

19.6 一般的泰勒展开式

在 §19.2 中考察过用泰勒多项式近似函数的一个算法. 然而这个方法要求

我们的函数满足两个性质：(1)$f(x)$ 在一个包含 0 的区间上无限可微，以及 (2)$f(0)$ 和 $f^{(k)}(0)$ 的值对 $k = 1,2,\cdots,m$ 为已知. 可惜，有许多例子并不满足第二个性质. 例如，假设我们要作$\sqrt{3}$ 的近似. 我们能用似乎挺好的函数

$$f(x) = \sqrt{2+x} \tag{19.17}$$

来试一试，它在 0 附近显然可微. 当进行计算 f 和它在 0 的导数时，我们得到

$$f(0) = \sqrt{2},\ f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ f''(0) = -\frac{1}{8\sqrt{2}},\cdots, \tag{19.18}$$

因而除非知道$\sqrt{2}$ 的值，否则$\sqrt{3}$ 的近似计算便不能进行. 这时当然可以用另外的函数来作近似，譬如 $f(x) = \sqrt{1+x}$.

非常多的情形是已经知道一个函数及其导数在某点 c 的值而这里的 $c \neq 0$. 例如，函数 $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ 在 $x = 3$ 特别好，因为 $f(3) = 1, f'(3) = \frac{2}{3}$, $f''(3) = -\frac{2}{9}$ 等等. 把原来的算法推广到另一个算法将是有用的，在那里我们计算所考虑的函数及其导数在 3 的值（或一般地某个方便的点 c），便能得到近似级数的系数.

在开始阐述这个新算法时，我们令 c 为一常数. 定义一个**关于 $x = c$ 的幂级数**为一个无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \tag{19.19}$$

其中 a_n 为固定实数，$n = 0,1,2,\cdots$. 如果(19.19) 对 $|x-c| < R$ 绝对收敛而对 $|x-c| > R$ 发散，则称 R 为幂级数(19.19) 的**收敛半径**. 如果函数 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n,$$

则必须（其论证类比于定理 19.9 所给出的）

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

于是此展开式有形式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

并被指称为 $f(x)$ **关于 $x = c$ 的泰勒展开**.

例 19.20　求 $f(x) = e^{x-2}$ 关于 $x = 2$ 的泰勒展开.

点 $x=2$ 的确是个好选择：$f(2)=e^{2-2}=1, f'(2)=1, f''(2)=1,\cdots$.
因此

$$e^{x-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}.$$

例 19.21 求 $\sin(2x-1)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 的泰勒展开.

对于 $f(x)=\sin(2x-1)$ 我们容易看出 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，进而，

$$f'(x)=2\cos(2x-1),$$

从而

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=2, f''(x)=-4\sin(2x-1)$$

产生了

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=0,$$

而

$$f'''(x)=-8\cos(2x-1)$$

表明

$$f'''\left(\frac{1}{2}\right)=-8.$$

照此继续我们得到了想要的展式，

$$\sin(2x-1)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{8}{3!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{32}{5!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^5-\cdots.$$

§19.6 的习题

对下列函数求关于已知点 $x=c$ 的泰勒级数的前四项. 用你的 CAS 画出原来的函数，它的 4 次泰勒多项式. 这些图像靠得近吗?

(1) e^{2x-1} 关于 $x=\frac{1}{2}$.

(2) $\cos(3x-2)$ 关于 $x=\frac{2}{3}$.

(3) $\sin(x)$ 关于 $x=\frac{2\pi}{3}$.

(4) $\cos(x)$ 关于 $x=2\pi-\frac{\pi}{6}$.

(5) $\sqrt{x}$ 关于 $x=16$.

(6) $\tan(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{4}$.

(7) $\ln(x)$ 关于 $x = e$.　　(8) x^{19} 关于 $x = 1$.

(9) $x^{-\frac{2}{3}}$ 关于 $x = 27$.　　(10) $\ln(\sin(x))$ 关于 $x = \frac{\pi}{2}$.

19.7　复泰勒级数和欧拉公式

因为没有一个实数的平方等于 -1，故方程 $x^2 + 1 = 0$ 没有实数解. 但是我们可以把**虚数** $i = \sqrt{-1}$ 的存在性作为公设. 由定义 i 的方式我们看到 $i^2 = -1$，$i^3 = -i$，$i^4 = 1$，$i^5 = -1$ 等等. 当我们把虚数 i 加进实数集 $\mathbb{R}$ 中时所产生的扩大了的数系被记为

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

并称其为**复数**.

对复数可以进行加，减，乘和除. 例如

$$\begin{aligned}(2+3i)\cdot(1-2i) &= (2+3i) - (2+3i)\cdot 2i \\ &= 2 + 3i - 4i + 6 \\ &= 8 - i.\end{aligned}$$

$$\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{2+3i}{1-2i}\cdot\overbrace{\frac{1+2i}{1+2i}}^{\text{小技巧}} = \frac{8-i}{1+4} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i.$$

一个**复幂级数**是形如下面的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

其中 $a_n \in \mathbb{C}$. 由于 $a_n \in \mathbb{C}$ 必具形式 $a_n = r_n + i\beta_n$，其中 $r_n, \beta_n \in \mathbb{R}$，故得到复幂级数可以表达为下面的和：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n\right) + i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n\right).$$

单复变函数论是个重要的数学分支，它已超越了本教程的范围. 为了嗜到一点这个漂亮学科的滋味，我们将推导出**欧拉公式**，该公式说

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

函数 e^x 的泰勒级数是 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. 如果我们形式地把 x 换作 $i\theta$，此泰勒级数成为

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \cdots \tag{19.20}$$

$$= 1 + \mathrm{i}\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \mathrm{i}\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + \mathrm{i}\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta).$$

例 19.22 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$. 毫无疑问,这是数学中最精彩的等式之一. 注意它将 e, π 和 i 联系在一起!

例 19.23 用欧拉公式验证下面的三角函数等式:

$$\cos(2\theta) = (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2, \tag{19.21}$$

$$\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta).$$

因为 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = \cos(2\theta) + \mathrm{i}\sin(2\theta)$,由定义

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2 = (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^2$$

$$= (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2 + 2\mathrm{i}\cos(\theta)\sin(\theta), \tag{19.22}$$

我们推导出 $\cos(2\theta) = (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2$ 和 $\sin 2\theta = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$.

§19.7 的习题

进行下面涉及复数的算术计算. 用你的 CAS 检验.

(1) $(3+2\mathrm{i}) + (1-5\mathrm{i})$. (2) $(3+2\mathrm{i}) \cdot (1-5\mathrm{i})$. (3) $\frac{(3+2\mathrm{i})}{(1-5\mathrm{i})}$.

(4) $(2+3\mathrm{i})^2$. (5) $(2+3\mathrm{i})^{-2}$. (6) $(1+\mathrm{i})^3$.

(7) 将欧拉公式用于指数恒等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)}$ 来求出 $\cos(a+b)$ 和 $\sin(a+b)$ 的公式.

(8) 用欧拉公式于 $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^3$ 以求出 $\cos(3\theta)$ 和 $\sin(3\theta)$ 的公式.

(9) 求 $\cos(N\theta)$ 的公式,其中 N 为任意正整数.

(10) 求 $\cos\left(\frac{\theta}{N}\right)$的公式,其中 N 为任意正整数.

19.8 洛必达法则

泰勒级数的另一个令人印象深刻的应用是其计算极限的能力,如像

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}, \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}, \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1}{x^2}. \tag{19.23}$$

这些是不定式的极限的例子,这是因为它们每个都有形式

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)},$$

其中$f(c)=g(c)=0$. 洛必达(1661—1704)找到一个能计算这类极限的简单规则. 假定$f(x)$和$g(x)$都在$x=c$周围的某区间中有收敛的泰勒级数展开,则此法则告诉我们

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注　如果$f'(c)=g'(c)=0$则$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$又是不定式,要求第二次使用洛必达法则.

例 19.24　使用洛必达法则计算(19.23)中的极限.

观察这些计算,则洛必达法则的用处就清楚了.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{-\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}=-\frac{4}{\pi}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2e^{x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-2e^{x}}{2}=1.$$

例 19.25　计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)}.$$

这时我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}=\infty.$$

为了表明洛必达法则的正确性,设

$$f(x)=f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots$$

$$g(x)=g'(c)(x-c)+\frac{g''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots$$

为$f(x)$和$g(x)$的泰勒级数展开. 于是

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots}{g'(c)(x-c)+\frac{g''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots}\cdot\overbrace{\frac{\frac{1}{(x-c)}}{\frac{1}{(x-c)}}}^{\text{小技巧}}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f'(c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c) + \cdots}{g'(c) + \frac{g''(c)}{2!}(x-c) + \cdots} = \lim_{x \to c} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

除非有 $f'(c) = g'(c) = 0$. 但这时我们有

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots}{\frac{g''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{g'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots} = \lim_{x \to c} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

除非有 $f''(c) = g''(c) = 0$. 这时应如何进行下去是清楚的.

§19.8 的习题

用洛必达法则求下列极限.

(1) $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$.

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)}$.

(3) $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$.

(4) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-2x+1}$.

(5) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1-x}{(\sin(x))^2}$.

(6) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)-x}{x^3}$.

(7) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$.

(8) $\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x)}{\sin(x)}$.

(9) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-2}{\sin(\pi x)}$.

(10) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(x-1)}$.

(11) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$.

(12) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\arcsin(4x)}$.

(13) 使用洛必达法则计算

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin(\pi t^2)\, dt.$$

你也应该用代入对 $\sin(\pi t^2)$ 的泰勒级数展开式逐项积分后的式子来做此计算.

(14) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 对形如的极限,通过令 $x = \frac{1}{y}$ 并令 $y \to 0$ 的方法,能证明洛必达法则仍行得通. 请证明.

19.9 用泰勒级数解微分方程

解微分方程最有效的方法之一是,一开始就假定其解可以被表示为幂级数. 在作此假定后,我们便可将此级数代入该微分方程并力图解出此幂级数的系数. 用两个例题来解释这个方法,它们将向读者展示这个方法的威力.

例 19.26 解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2xy.$$

开始我们假定一个解 $y = f(x)$ 由幂级数给出，即

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

然后，由定义，

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots,$$

将问题化为解系数 $a_1, a_2, \cdots$. 代此幂级数展式到原来的微分方程中，产生了

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots &= 2x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \\ &= 2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + \cdots, \end{aligned}$$

或者等价地，

$$a_1 + (2a_2 - 2a_0)x + (3a_3 - 2a_1)x^2 + (4a_4 - 2a_2)x^3 + \cdots = 0.$$

此幂级数恒为 0 的唯一途径是其每项系数为 0：

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ 2a_2 - 2a_0 &= 0, \\ 3a_3 - 2a_1 &= 0, \\ 4a_4 - 2a_2 &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ na_n - 2a_{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

由这些方程我们看到

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 &= a_0, \\ a_3 &= 0, \\ a_4 &= \frac{a_2}{2} = \frac{a_0}{2}, \\ a_5 &= 0, \\ a_6 &= \frac{a_4}{3} = \frac{a_0}{3 \times 2}, \\ a_7 &= 0, \\ a_8 &= \frac{a_6}{4} = \frac{a_0}{4 \times 3 \times 2}, \end{aligned}$$

....

最后的结果是

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{如果 } n = 1,3,5,7,\cdots, \\ \dfrac{a_n}{\left(\dfrac{n}{2}\right)!}, & \text{如果 } n = 0,2,4,6,8,\cdots, \end{cases}$$

而 a_0 的值仍未确定(可为任意值). 由于只有偶次系数才对此级数有所贡献,当我们令 $n = 2k, k = 0,1,2,\cdots$ 时,此函数有形式

$$f(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}.$$

此级数正好是个熟悉的. 事实上它是函数

$$f(x) = a_0 e^{x^2}$$

的泰勒展开,因此 $y = a_0 e^{x^2}$ 是方程$\frac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解. 常数 a_0 在初始条件给出时便能确定. 初始条件的一个例子是 $y(0) = 10$,这时 $a_0 = 10$.

例 19.27 解微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y.$$

我们开始又一次假设

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots.$$

微分两次产生了

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2 + 3 \times 2a_3x + 4 \times 3a_4x^2 + \cdots,$$

连同原微分方程,我们得到恒等式

$$2a_2 + 3 \times 2a_3x + 4 \times 3a_4x^2 + \cdots = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots,$$

故而

$$(2a_2 - a_0) + (3 \times 2a_3 - a_1)x + (4 \times 3a_4 - a_2)x^2 + \cdots = 0$$

以及

$$2a_2 - a_0 = 0,$$

$$6a_3 - a_1 = 0,$$

$$12a_4 - a_2 = 0,$$

$$30a_6 - a_4 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

再次解出这些方程，

$$a_2 = \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2!},$$

$$a_3 = \frac{a_1}{6} = \frac{a_1}{3!},$$

$$a_4 = \frac{a_2}{12} = \frac{a_0}{24} = \frac{a_0}{4!},$$

$$a_5 = \frac{a_3}{20} = \frac{a_1}{120} = \frac{a_1}{5!},$$

$$a_6 = \frac{a_4}{30} = \frac{a_0}{720} = \frac{a_0}{6!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

到此时，其模式显现出来了：

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{a_0}{n!}, & \text{如果 } n = 0,2,4,6,\cdots \\ \dfrac{a_1}{n!}, & \text{如果 } n = 1,3,5,7,\cdots. \end{cases}$$

这里的 a_0 和 a_1 是未定的，而此微分方程的通解 $y = f(x)$ 由下面的和给出：

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

常数 a_0, a_1 在初始条件给出后，譬如 $y(0) = 1$ 和 $y'(0) = 1$，才能被决定. 在这时，$y(0) = 1$ 意味 $a_0 = 1$，类似地 $y'(0) = 1$ 表明 $a_1 = 1$，这是由于

$$y = a_0\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right),$$

$$y' = a_0\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) + a_1\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right).$$

提问　求函数 $y = f(x)$，使得 $\frac{d^2y}{dx^2} = y$ 并有初始条件 $y(0) = 1$ 和 $y'(0) = 1$.

回答　在例 19.27 中已经指出过

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

初始条件 $y(0) = 1$ 和 $y'(0) = 1$ 蕴含 $a_0 = 1 = a_1$. 因此我们可以简化此级数得

到

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

§19.9 的习题

用泰勒级数的方法解下列微分方程. 试认出级数解,并且当初始条件给出后,用它们定出常数.

(1) $y'' = 1$.

(2) $y''' = x^2, y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1$.

(3) $y' + 2y = 0$.

(4) $y'' = -y, y(0) = 1, y'(0) = 0$.

(5) $y'' + xy = 0$.

(6) $y'' - xy' + 2y = 0$.

第十九章的附加习题

对于下列问题使用 CAS 应大加鼓励.

(1) 写出下面的每个多项式为 $(x-2)$ 的多项式.

(a) $3x^2 - 6x + 4$.

(b) $x^4 - 5x^3 + 9x^2$.

求具有指出的次数,关于指出的点的泰勒多项式.

(2) $\cos(x)$; $2n$, π.

(3) $\exp(\cos(x))$; 3, 0.

(4) $\frac{1}{1+x}$; n, 0.

(5) $\cos(x)$; $2n$, $\pi/2$.

用充分大次数 n 的泰勒多项式计算下面的数到指定的精度.

(6) $\sin(5)$; 误差 $< 10^{-20}$.

(7) $\arctan(1)$; 误差 $< 10^{-100}$.

(8) 假设 f 和 g 在点 a 的泰勒多项式分别为

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f^i(a)}{i!}(x-a)^i$$

和

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{g^i(a)}{i!}(x-a)^i.$$

求 $f+g, f \cdot g$ 在 a 的泰勒级数的系数.

(9) 求 $f(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)\mathrm{d}t$ 在 0 的 4 次泰勒多项式.

(10) 计算 $\exp(-1/2)$, 误差 $< 10^{-4}$.

(11) 用级数法解下列微分方程:

(a) $y' = 2t^5 - \frac{3}{t}$.

(b) $y' = \exp(t) + 4t - \frac{5}{t}$.

(12) 假设一种鱼的种群在某池塘内按微分方程

$$\frac{dP}{dt} = 0.001(1000 - P)P$$

增长.

(a) 鱼的种群在平衡态是说它随时间保持常数. 如用池塘的鱼的数量来表示的话请解释它意味着什么?

(b) 我们知道 $P \geqslant 0$,且$\frac{dP}{dt}$依赖于P. 对P的什么值有$\frac{dP}{dt} > 0$?对什么样的P值$\frac{dP}{dt} < 0$?用鱼的种群数表示的话,请解释这意味着什么?你能看出为什么环保主义者要指认1000为此池塘能承载的鱼的容量?

(c) 捕鱼会对鱼的种群有什么影响?如果鱼以每年80的比率被捕捉会发生什么?(在全年其分布是均匀的). 对年率x建立微分方程并求出其平衡态.

(d) 用级数法解此微分方程.

(13) 用级数法解微分方程

$$y' = (y-1)(y-3) + x, y(0) = 0.$$

设$y = g(x)$代表此解. 曲线$y = g(x)$在点$(3,5)$的切线交y轴于点$(0,10)$.

(a) $g'(3)$是什么?

(b) 用线性近似对$g(2.95)$估值.

(14) 假设$f'(x) = \cos(x^2)$,且$f(1) = 0$. 首先用线性的然后用2次的近似对$f(0.5)$估值.

(15) 线性近似$(1+x)^k \simeq 1 + kx$相当有用. 在对下列值用此近似时,求出我们所造成的误差.

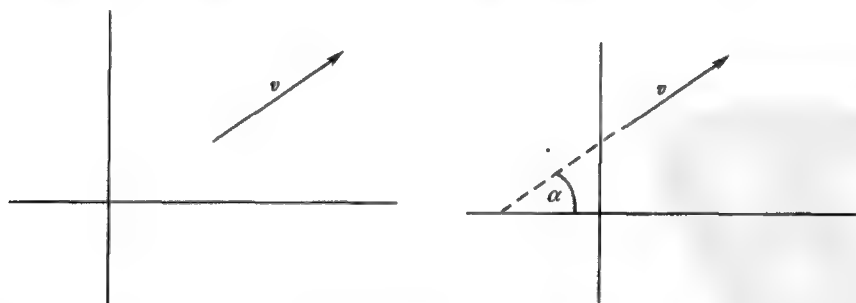
(a) $(1.03)^2$, (b) $(1.001)^{-1}$, (c) $\sqrt{1.0404}$.

(16) 设h是个二次可微函数使得$h(2) = 3, h'(2) = -2$, 及$-2 \leqslant h''(x) \leqslant 1$对所有$0 \leqslant x \leqslant 4$成立. 证明$0 \leqslant h(3) \leqslant 2$.

第二十章　二维和三维空间中的向量

20.1　向量简介

向量是个数学存在，它被两个成分唯一决定：大小和方向. 在笛卡儿平面（即二维空间）中，我们可以把一个向量 $\boldsymbol{v}$ 形象化地看作一支箭头.

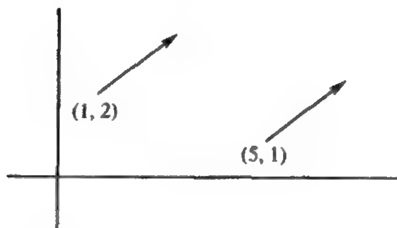


箭头的长度是它的**大小**. 我们定义其**方向**以 x 轴与向两头延长向量形成的直线之间构成的角 α 度量.

向量概念的一个物理实现是一个具已知大小以指定方向施行的力.

这里有一个要掌握的微妙之处：向量被它的长度和方向唯一决定. 它不依

赖于其他任何东西. 特别它不依赖于我们选择它的所在平面中的位置. 在下面的图示中我们看到在空间中两个不同位置上的一个已知向量. 正如同只有一颗霍普钻石(世界上最大的蓝钻石)一样,不管它是在博物馆还是在矿洞里,同样也只有已知长度和已知方向的一个向量而不管它是从点(1,2)出发的还是从点(5,1)出发的.



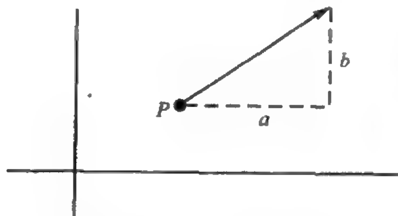
上图中的两支箭头相互平行且有同样的长度:它们代表同一个向量. 唯一界定了霍普钻石的感官品质与其所在地无关,相似地,大小和方向的数学量唯一定义了向量.

提问　如何从数学上表示向量?

回答　表示二维空间中一个向量的经典方式是用一对实数(a,b)或一黑体字母. 有时需要特别表明这是个向量,我们在这对数上面放上一个箭头,写成

$$\boldsymbol{v}=(a,b)$$

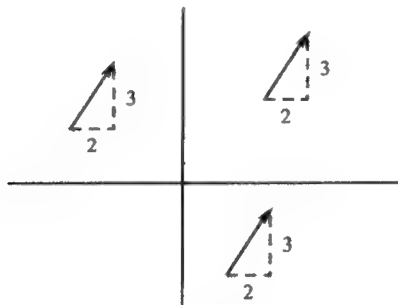
来代表这样一个向量,它由一支箭头表示(从任一点P出发),并由此箭头是一个两直角边长为a和b的直角三角形的斜边这个条件唯一决定.



直观地,我们把向量(a,b)想成是沿水平方向移动a步,又在竖直方向移动b步得到的一支箭头. 向量与图中点P的选取无关.

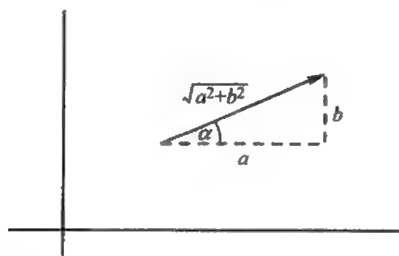
例 20.1　画出代表向量(2,3)的三支不同的箭头.

向量(2,3)由从某个点出发水平移动2步然后竖直方向移3步而唯一决定. 下面的三支箭头均代表同一向量.

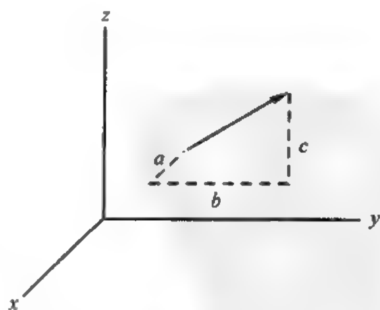


提问　已知向量(a,b),它的长度和方向是什么?

回答　(a,b)的长度(由毕达哥拉斯定理得出)是简单的$\sqrt{a^2+b^2}$. 向量的方向只不过是角$\alpha=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$,这里的$\alpha$限定的范围是$-\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi$.



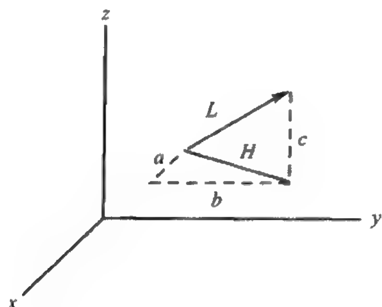
下一步我们考虑具x,y和z坐标轴的三维坐标系. 实数的一个三元组(a,b,c)是个三维空间中的向量. 它可由一支箭头表示,由从任意点出发,沿x方向移动a步,再沿y方向移动b步,最后沿z方向c步得到.



命题20.2　*三维向量(a,b,c)的长度为$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.*

证明　设L表示向量(a,b,c)的长度. 参照下面的图解. 观察到$H^2+c^2=L^2$和$a^2+b^2=H^2$,从而我们得到

$$L=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$



§ 20.1 的习题

求下列向量的长度：

(1) $(2,5)$.　(2) $(0,-1,1)$.　(3) $(-1.5,2)$.　(4) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

(5) $(\sqrt{2},-\sqrt{3})$.　(6) $(0,\sqrt{2},1)$.　(7) $(\pi,1)$.　(8) $(-3,1,0)$.

(9) 用你的 CAS 构造一个函数，它对输入的一个向量 (a,b)，输出在点 $(0,0)$ 和 (a,b) 间的一支箭头的图形.

(10) 用你的 CAS 构造一个函数，它对输入的一个向量 (a,b) 和一固定点 $P=(p,q)$，输出在点 P 与 (a,b) 间的一支箭头的图形.

(11) 在三维空间中重复习题(9) 和(10).

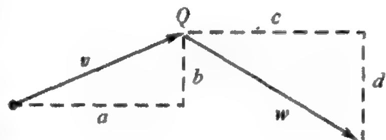
20.2　向量代数

正如数和函数能够加，减，乘和除那样，自然想要在向量上实行这些运算. 记住这一点；我们从加法开始.

向量的加法是个非常自然的过程（从几何的角度看）. 已知两个向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$，最显然生成第三个向量的办法是将原来的两个向量头尾相连，把得到的在图中用虚线表示的向量定义为 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$.



为了以符号来表示这个过程,我们假定 $\boldsymbol{v}=(a,b)$,$\boldsymbol{w}=(c,d)$ 并考虑右图. 由定义,假若 $\boldsymbol{v}$ 从某点 P 出发,则 $\boldsymbol{v}$ 表示我们在水平方向移动了 a 步而在竖直方向移动了 b 步并到达了点 Q. 现在放置 $\boldsymbol{w}$ 使其从 Q 出发,我们看出,按定义 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 也就是向量 $(a+c,b+d)$. 注意这个特定的图示中 $d<0$.



我们将上面的讨论概括为下面的定义.

定义 设 $\boldsymbol{v}=(a,b)$,$\boldsymbol{w}=(c,d)$ 为二维空间中两个向量. 我们定义

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(a+c,b+d).$$

三维空间中的向量有类似的定义.

定义 设 $\boldsymbol{v}=(a,b,c)$,$\boldsymbol{w}=(d,e,f)$ 为三维空间中两个任意向量. 我们定义

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(a+d,b+e,c+f)$$

注 注意向量的加法在运算的交换性上,与数和函数的加法是可类比的,即 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$,其中 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 是二维或三维的向量. 另外**零向量** $(0,0)$ 或 $(0,0,0)$ (记为 $\boldsymbol{0}$) 具有下面性质:对任意向量 $\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v}.$$

零向量长为零,没有确定的方向.

例 20.3 求向量 $(2,-1,3)$ 与向量 $(1,4,-5)$ 的和.

其和为 $(2,-1,3)+(1,4,-5)=(3,3,-2)$.

在定义了向量加法后,现在进行它的逆运算,即减法. 当我们考虑通常数的减法时,可将 $a-b$ 看作一个加法(假定已赋与负数以意义),即 $a-b=a+(-b)$. 想着这点,我们开始作一个定义:

定义 设 $\boldsymbol{v}=(a,b)$ 为二维空间中任一向量. 定义 $-\boldsymbol{v}=(-a,-b)$. 于是 $-\boldsymbol{v}$ 只不过是与 $\boldsymbol{v}$ 具有相反方向的向量.



对三维的向量是类似的,

定义 如果 $\boldsymbol{v}=(a,b,c)$ 为任意一个三维向量,则定义 $-\boldsymbol{v}=(-a,-b,-c)$.

我们现在能够定义向量的减法了.

定义 定义向量的减法为

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w}).$$

例 20.4 设 $\boldsymbol{v} = (2,1,4)$，$\boldsymbol{w} = (3,-1,2)$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} &= (2,1,4) + (-3,1,-2)\\ &= (-1,2,2).\end{aligned}$$

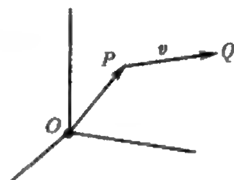
提问 已知三维空间中点 $P = (p_1,p_2,p_3)$ 和 $Q = (q_1,q_2,q_3)$，起点在 P，终点在 Q 的向量 $\boldsymbol{v}$ 是什么？

回答 尽管这个问题的答案简单地为

$$\boldsymbol{v} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3),$$

但验证这件事却需要一点细致的思考.

考虑向量$\overrightarrow{OP}$ 和$\overrightarrow{OQ}$，它们分别是从原点出发，终点在 P 和 Q 的向量.

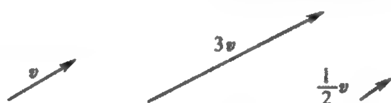


很清楚，$\overrightarrow{OP} + \boldsymbol{v} = \overrightarrow{OQ}$，因而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\\ &= (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3).\end{aligned}$$

最后我们想要用定义向量乘法来完成数(或函数)与向量之间的类比. 这项任务原来是比加法和减法要复杂许多. 事实上，我们将两个向量的乘法定义推迟到 §20.4 和 §20.5. 本节剩余篇幅用来定义一个实数和一个向量的乘积.

已知向量 $\boldsymbol{v}$，可让它自身相加 3 次(从而使长度成为三倍)得到一个新向量 $3\boldsymbol{v}$. 类似地，可以把此向量分为一半.



几何观察启发出下面的定义.

定义 设 $\boldsymbol{v} = (a,b)$，$\boldsymbol{w} = (a,b,c)$ 分别为二维和三维空间中的向量. 给出任意实数 m，定义

$$\begin{aligned}m\boldsymbol{v} &= (ma,mb),\\ m\boldsymbol{w} &= (ma,mb,mc).\end{aligned}$$

例 20.5 设 $\boldsymbol{v}_1 = (1,2)$，$\boldsymbol{v}_2 = (5,-2)$，$\boldsymbol{w} = (2,9,-1)$. 于是

$$4\boldsymbol{w} = (8,36,-4),\ \frac{1}{3}\boldsymbol{w} = \left(\frac{2}{3},3,-\frac{1}{3}\right),$$

以及

$$2\boldsymbol{v}_1-\frac{1}{4}\boldsymbol{v}_2=\left(\frac{3}{4},\frac{9}{2}\right).$$

§20.2 的习题

进行下面的向量算术运算. 用你的 CAS 检查你的答案.

(1) $(2,-1)+(-3,2)$.　(2) $(-1,8)-(-2,3)$.　(3) $5\cdot(8,-2)$.

(4) $(3,-2,4)+(6,1,3)$.　(5) $(2,-7,1)-(-3,7,3)$.　(6) $\frac{1}{4}\cdot(4,0,-1)$.

(7) 设 $P=(1,-3)$, $Q=(2,6)$ 为二维空间中的点. 求起点为 P 终点为 Q 的向量. 其长多少? 画出从 P 到 Q 的箭头.

(8) 设 $P=(-2,3,0)$ 和 $Q=(1,4,-3)$ 为三维空间中的点. 求起点在 P 终点在 Q 的向量. 其长多少?画出从 P 到 Q 的箭头.

20.3　二维和三维空间中的基向量

在二维空间中,当我们定义向量

$$\boldsymbol{i}=(1,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1)$$

时,清楚地看出任意向量 $\boldsymbol{v}=(a,b)$ 可以表示为 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 的一个**线性组合**:

$$\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}.$$

注意 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 都有长度 1. 容易证明表达式 $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ 事实上是唯一的.

在三维空间中我们有一个类比的定义. 设

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\ \boldsymbol{j}=(0,1,0),\ \boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

于是三维空间中的任意向量 $\boldsymbol{v}=(a,b,c)$ 可以表示为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的一个线性组合:

$$\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}.$$

向量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 以及 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别构成了二维和三维空间的**基**,称它们为**基向量**. 如果一个空间中一组向量具有使此空间的任何向量能够唯一地表示为这组向量的线性组合的性质,我们则称此组向量构成了这个空间(譬如三维空间) 的一个基. 一般说来,不存在选取基的唯一方式. 例如,在三维空间中已选取了 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为基向量,但我们也能完全等价地选取任何其他三个相互垂直的向量作为基. 然而不管基的选取如何,基向量的个数却保持不变,它等于所考虑空间的维数.

20.4　点积

现在介绍两个向量的**点积** $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$.

定义　设 $\boldsymbol{v}=(a,b)$，$\boldsymbol{w}=(c,d)$ 为二维空间中的向量. 定义点积为

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=ac+bd.$$

定义　设 $\boldsymbol{v}=(a,b,c)$，$\boldsymbol{w}=(d,e,f)$ 为三维空间中的向量. 定义点积为

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=ad+be+cf.$$

警示　两个向量的点积不是一个向量，它是一个数(常常称其为一个纯量).

例 20.6　下面的例子说明点积容易计算：

$$(4,-1,2)\cdot(2,3,-5)=8-3-10=-5,$$
$$(2,3)\cdot(-1,4)=-2+12=10,$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=(1,0,0)(0,0,1)=0,$$
$$(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{j}=(2,1)(0,1)=1.$$

点积在许多方面的表现，像数或函数乘法所表现的那样，它满足代数性质

$$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u},\tag{20.1}$$

以及

$$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}.\tag{20.2}$$

回想通常被记为 $|\boldsymbol{v}|$ 的向量 $\boldsymbol{v}=(a,b,c)$ 的长度被定义为 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 用点积的记号，我们可简化这个公式为

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}.\tag{20.3}$$

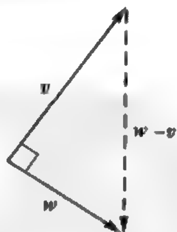
注意，如果我们对 $\boldsymbol{v}$ 乘以纯量 c，则

$$|c\boldsymbol{v}|=\sqrt{c\boldsymbol{v}\cdot c\boldsymbol{v}}=c\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}=c|\boldsymbol{v}|.\tag{20.4}$$

这个简单的观察连同点积的代数性质，使我们能证明下面的命题.

命题 20.7　如果两个向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 垂直(正交)，则

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0.$$



证明　首先注意我们可假定两个向量均非零. 考虑由 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}$ 构成的三角形.

由于按假定 $\boldsymbol{v}$ 垂直于 $\boldsymbol{w}$，我们可以用毕达哥拉斯定理，连同方程(20.3)，给了我们下面的等式：

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}|^2+|\boldsymbol{w}|^2&=|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|^2\\&=(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})\\&=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}-2\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\\&=|\boldsymbol{w}|^2-2\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}+|\boldsymbol{v}|^2.\end{aligned}\tag{20.5}$$

显然这个等式只有 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$ 才能成立.

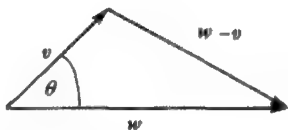
用来证明命题 20.7 的论证，在稍加修改后便能给我们一个更强的(也更重

要的）结果.

定理 20.8 设 θ 为向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 之间的角，则

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|\cos(\theta).$$

证明 考虑图示



当我们把余弦定律

$$|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{v}|^2 + |\boldsymbol{w}|^2 - 2|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{w}|\cos(\theta)$$

与等式(20.5)

$$|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{w}|^2 - 2\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} + |\boldsymbol{v}|^2$$

相结合，便得到定理.

推论 20.9 两个向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 为垂直的当且仅当

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0.$$

证明 在命题 20.7 中已证明垂直性意味着点积为零. 相反的陈述立刻从我们的定理得到：如果 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0$，则 $|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{w}|\cos(\theta) = 0$，从而 $\cos(\theta) = 0$，这说明此两向量垂直.

例 20.10 向量 $(2,-3,-1)$ 与 $(4,1,5)$ 垂直吗?

由于 $(2,-3,-1)\cdot(4,1,5) = 8-3-5 = 0$，这两向量必定垂直.

例 20.11 找一个长为 10 且与向量 $3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ 垂直的向量.

要解决此问题我们先求出一个与 $3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ 垂直的向量. 向量 $(2,3)$ 垂直于向量 $3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j} = (3,-2)$，这是因为 $(2,3)\cdot(3,-2) = 0$. 可惜，$(2,3)$ 的长度是

$$|(2,3)| = \sqrt{(2,3)\cdot(2,3)} = \sqrt{13}.$$

要强使向量有长度 10，我们对 $(2,3)$ 乘以 $\frac{10}{\sqrt{13}}$ 生成了向量

$$\left(\frac{20}{\sqrt{13}},\frac{30}{\sqrt{13}}\right).$$

此新向量垂直于 $(3,-2)$ 这点是清楚的（因为它由拉长垂直于 $(3,-2)$ 的另一向量而得到），而由方程(20.4)知此新向量长度为 10.

例 20.12 求向量 $(1,0,1)$ 与 $(0,1,1)$ 之间的夹角.

应用定理 20.8 我们有

$$\cos(\theta) = \frac{(1,0,1)\cdot(0,1,1)}{|(1,0,1)|\cdot|(0,1,1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

因此 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

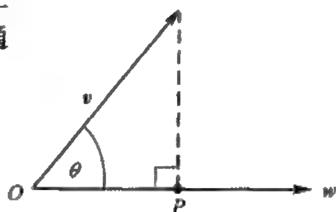
例 20.13　求向量 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角.

这时我们有

$$\cos(\theta)=\frac{(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}|\cdot|\boldsymbol{k}|}=\frac{(1,0,1)\cdot(0,0,1)}{|(1,0,1)|\cdot|(0,0,1)|}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

因此 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

点积可以用来求一个向量 $\boldsymbol{v}$ 到另一个向量 $\boldsymbol{w}$ 上的投影. $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{w}$ 上的投影在图中记为 $\overrightarrow{OP}$,其长度可通过定理 20.8 计算. 事实上从三角学上我们知道



$$\cos(\theta)=\frac{|OP|}{|\boldsymbol{v}|},$$

而定理 20.8 告诉我们

$$\cos(\theta)=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{w}|}.$$

联合这些等式,我们得到

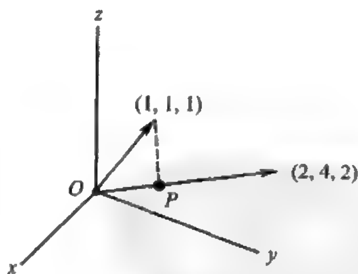
$$|OP|=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|}. \tag{20.6}$$

例 20.14　求向量 (1,1,1) 在向量 (2,4,2) 上的投影.

为了在此问题上保持一个好的几何视角,我们先画出这个已知的三维向量. 为求出向量 $\overrightarrow{OP}$ 我们先计算它的长度:

$$|\overrightarrow{OP}|=\frac{(1,1,1)\cdot(2,4,2)}{|(2,4,2)|}$$

$$=\frac{8}{\sqrt{24}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{6}.$$



因为向量 $\overrightarrow{OP}$ 平行于 (2,4,2), 于是它是 (2,4,2) 的一个纯量倍. 但 (2,4,2) 长度为 $2\sqrt{6}$,因此用 $\frac{2}{6}$ 乘以 (2,4,2) 便得到了解,即

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{6}(2,4,2)=\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right).$$

§ 20.4 的习题

计算下列的点积.

(1) $(2,-4)\cdot(1,3)$. (2) $2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}$. (3) $(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k})\cdot(2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})$.

(4) $(1,-3,7)\cdot(2,0,-2)$. (5) $(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})$. (6) $(1,-1,3)\cdot(2,-3,4)$.

决定下面每对向量是否垂直. 画出这些向量(从某个共同点出发)以从形象上确信你的答案.

(7) $(-2,9),\left(1,-\frac{1}{2}\right)$. (8) $(-2,9),\left(\frac{3}{2},\frac{1}{3}\right)$. (9) $(2,4),(2,-1)$.

(10) $(1,3,-2),(2,4,1)$. (11) $(3,-1,2),(2,4,-1)$. (12) $(2,1,-4),(1,2,0)$.

对下列每个向量,求垂直于这个已知向量但长度为1,5,10的向量. 画出这些向量以从形象上确认你的答案.

(13) $(2,6)$. (14) $(-3,4)$. (15) $(1,2,-3)$.

(16) $\left(-1,2,\frac{1}{2}\right)$.

求下列每对向量间的夹角.

(17) $(3,-1),(2,1)$. (18) $(1,1,0),(-1,-2,1)$.

(19) $3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$. (20) $(-6,0,2),(-5,3,-2)$.

(21) $(-1,3,2),(-1,3,2)$. (22) $\left(\frac{1}{7},-3\right),\left(28,\frac{4}{3}\right)$.

对每对下列的向量求向量 $\boldsymbol{v}$ 在向量 $\boldsymbol{w}$ 上的投影.

(23) $\boldsymbol{v}=(1,-2),\boldsymbol{w}=(2,8)$. (24) $\boldsymbol{v}=(2,-3),\boldsymbol{w}=(5,1)$.

(25) $\boldsymbol{v}=(1,4,-2),\boldsymbol{w}=(2,3,-1)$. (26) $\boldsymbol{v}=(2,1,3),\boldsymbol{w}=(1,-3,4)$.

(27) 求向量 $(1,4),(2,-3,4)$ 与 y 轴之间的夹角.

(28) 证明对任何两个向量 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 有 $|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\leqslant|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{w}|$.

(29) 证明对任意两个向量 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 有 $|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}|\leqslant|\boldsymbol{v}|+|\boldsymbol{w}|$.

(30) 证明如果 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 是任意两个具有相同长度的非零向量,则 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$ 垂直.

(31) 设 $\boldsymbol{u}$ 为任一长度为1的向量(即一单位向量). 证明对任意向量 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ 总是垂直于 $\boldsymbol{u}$.

20.5 叉积

为完成对向量代数结构的讨论,现在定义三维空间中两个向量的**叉积**. 叉积是由两个向量相乘得出第三个向量的方法. 由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是三维空间的基向量,故在这些向量上定义叉积就够了. 一般的定义以代数规则拓展这些定义就可得到.

定义 叉积由下面的一组等式定义:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}, \tag{20.7}$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

这个定义实际上很容易记住：头三个不过是说一个向量与自己的叉积为零. 后面的那些等式可以把向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 绕着一个圆放置来记忆，然后注意到叉积与顺时针运动类同. 当我们按逆时针方向绕圆运动时符号逆转.

为了把这个定义拓展到所有向量，我们使用等式

$$\begin{aligned}(a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w})\times c\boldsymbol{u}&=ac(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})+bc(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}),\\ c\boldsymbol{u}\times(a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w})&=ac(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})+bc(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}),\end{aligned}\tag{20.8}$$

其中 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 为任意向量，a,b 和 c 为纯量. 叉积的定义可以在一个 CAS 上被编程(但它不是轻而易举的)，使得此 CAS 能计算任意一对向量的叉积.

警示　叉积是非交换的，即一般地，

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}.$$

例 20.15　计算叉积 $(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}$.

我们有

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}&=2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})-3(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&=-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{i}.\end{aligned}$$

例 20.16　计算 $(1,0,1)\times(0,1,1)$.

要进行这个计算，我们首先把每个向量表示为基向量的组合，然后像前面那样进行.

$$\begin{aligned}(1,0,1)\times(0,1,1)&=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\\&=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{k}\\&=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\\&=(-1,-1,1).\end{aligned}$$

注　必需记住点积和叉积是完全不同的东西. 两个向量的点积产生了一个纯量，而两个向量的叉积产生了第三个向量.

在计算了几个叉积的例子之后自然要去计算任意两个向量的叉积. 因此，考虑两个向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=(a_1,b_1,c_1),\\ \boldsymbol{w}&=(a_2,b_2,c_2).\end{aligned}$$

由定义，叉积由下面(多少有点冗长)的计算给出：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}&=(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)\\&=(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k})\times(a_2\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+c_2\boldsymbol{k})\\&=(a_1\boldsymbol{i}\times a_2\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}\times a_2\boldsymbol{i}+c_1\boldsymbol{k}\times a_2\boldsymbol{i})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (a_1 \boldsymbol{i} \times b_2 \boldsymbol{j} + b_1 \boldsymbol{j} \times b_2 \boldsymbol{j} + c_1 \boldsymbol{k} \times b_2 \boldsymbol{j}) \\
&+ (a_1 \boldsymbol{i} \times c_2 \boldsymbol{k} + b_1 \boldsymbol{j} \times c_2 \boldsymbol{k} + c_1 \boldsymbol{k} \times c_2 \boldsymbol{k}) \qquad (20.9) \\
&= (0 + b_1 a_2 (-\boldsymbol{k}) + c_1 a_2 \boldsymbol{j}) \\
&\quad + (a_1 b_2 \boldsymbol{k} + 0 + c_1 b_2 (-\boldsymbol{i})) \\
&\quad + (a_1 c_2 (-\boldsymbol{j}) + b_1 c_2 \boldsymbol{i} + 0) \\
&= (b_1 c_2 - c_1 b_2) \boldsymbol{i} + (c_1 a_2 - a_1 c_2) \boldsymbol{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \boldsymbol{k} \\
&= (b_1 c_2 - c_1 b_2) \boldsymbol{i} - (a_1 c_2 - c_1 a_2) \boldsymbol{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

在许多教材中这个计算实际上被当作叉积的定义. 为了使(20.9)更容易记住,我们现在介绍行列式的概念. 已知一个 2×2 的排列

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

定义 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

注意在(20.9)的计算中最后面所出现的三个这种形式的差.

现在已知一个 3×3 的排列

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

我们定义 $\boldsymbol{B}$ 的行列式为

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{B}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (20.10)
\end{aligned}
$$

注　(20.10)的一个办法是先注意 a_{11}:从 3×3 排列中移去包含 a_{11} 的行和列,然后取留下的 2×2 排列的行列式. 对 a_{12}, a_{13} 重复这个过程并构造其交错和,便给出了这个 3×3 排列的行列式.

联合方程(20.9)和(20.10)给出了下面的命题.

命题 20.17　$\boldsymbol{v} = (a_1, b_1, c_1)$ 和 $\boldsymbol{w} = (a_2, b_2, c_2)$ 的叉积由行列式

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

给出.

例 20.18　计算 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$的行列式.

按(20,10) 指明的方向我们有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

因此 $\det(B) = -2 - 4 + 3 = -3$.

例 20.19　计算$(2, -1,4) \times (3,1,0)$.

这里我们用上述的命题得到

$$(2, -1,4) \times (3,1,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

然后定义(20,10) 告诉我们

$$(2, -1,4) \times (3,1,0) = i\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

计算这些 2 × 2 排列的行列式,便得到了我们的答案:

$$(2, -1,4) \times (3,1,0) = -4i + 12j + 5k = (4,12,5).$$

§ 20.5 的习题

计算下列向量对的叉积.

(1) $(2i - 3j) \times i$.

(2) $(-2i + j - 4k) \times (2i - j)$.

(3) $(1,4, -1) \times (2,1,0)$.

(4) $(-3,2,5) \times (0, -1, -3)$.

(5) $(1, -1,1) \times (2, -3, -5)$.

(6) $(2, -3,2) \times (1,2,2)$.

计算下列的行列式.

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$.

(8) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

(9) $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

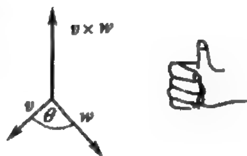
20.6 叉积的一些基本性质

三维空间中两个向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的叉积具有三个突出的性质，我们以下面的形式表示它们.

定理 20.20 *设 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 是三维空间中的向量.*

1. 向量 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 都垂直.

2. $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ 的方向由右手法则决定，那就是说，如果右手手指按从 $\boldsymbol{v}$ 到 $\boldsymbol{w}$ 旋转的方向弯曲，则大姆指指向了向量 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ 的方向.



3. $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ 的长度由等式

$$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{w}|\cdot\sin(\theta)$$

给出，其中 θ 是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 之间的角.

在证明这些性质之前，还是让我们看看它们的一些应用吧.

例 20.21 求一向量，其长为 3 并同时垂直于 $(1,-1,2)$ 和 $(1,1,-1)$.

为了找出具有所要性质的向量，我们首先计算所给向量的叉积（生成了一个垂直于所给向量的向量），然后对得到的向量乘以适当的纯量（以调整大小）.

交叉积为

$$(1,-1,2)\times(1,1,-1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} = (-1,3,2),$$

其长为 $\sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$. 为使我们的向量有长度 3，仅须对 $(-1,3,2)$ 乘以 $3/\sqrt{14}$，这便产生了

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{14}},\frac{9}{\sqrt{14}},\frac{6}{\sqrt{14}}\right).$$

例 20.22 $(1,0,1)$ 与 $(0,1,1)$ 之间的角 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 是什么？

首先计算向量的叉积，

$$(1,0,1)\times(0,1,1) = -\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} = (-1,-1,1).$$

定理中的第三个性质告诉我们，

$$|(-1,-1,1)| = \sqrt{3} = |(1,0,1)|\cdot|(0,1,1)|\sin(\theta) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\theta),$$

由此 $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

定理 20.20 的证明

1. 要证明 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ 垂直于 $\boldsymbol{v}$，我们去证明点积 $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v}=0$ 即可. 事实上验证十分容易：假定 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$，$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,w_3)$，则由(20.9)，

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v}=v_1(v_2w_3-v_3w_2)-v_2(v_1w_3-v_3w_1)+v_3(v_1w_2-v_2w_1),$$

这时每项都消去了从而证明了等式. $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ 垂直于 $\boldsymbol{w}$ 的证明完全由相同方法得到.

2. 这是 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，等等定义的简单重述.

3. 我们用等式

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=|\boldsymbol{v}|^2|\boldsymbol{w}|^2-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})^2$$

来证明最后的性质. 这个等式容易由 CAS(或用手算) 验证. 将此等式与

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|\cos(\theta)$$

联合产生了

$$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|^2=|\boldsymbol{v}|^2|\boldsymbol{w}|^2(1-\cos^2(\theta))=|\boldsymbol{v}|^2|\boldsymbol{w}|^2\sin^2(\theta).$$

20.7　叉积的应用

在本节中我们讨论叉积的三个值得注意的应用.

平行四边形的面积

考虑由两个向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 张成的平行四边形.



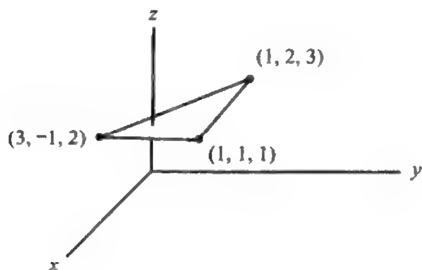
注意由于 $h=|\boldsymbol{v}|\sin(\theta)$，此平行四边形的面积是

$$|\boldsymbol{w}|\cdot h=|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{w}|\sin(\theta)=|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|. \tag{20.11}$$

例 20.23　求顶点为 $P=(1,1,1)$，$Q=(1,2,3)$ 和 $R=(3,-1,2)$ 的三角形的面积. 要得到此三角形面积，我们注意到三角形具有下面这些向量张成的平行四边形面积的一半：

$$\overrightarrow{PQ}=(1,2,3)-(1,1,1)=(0,1,2)$$

$$\overrightarrow{PR}=(3,-1,2)-(1,1,1)=(2,-2,1).$$



因此

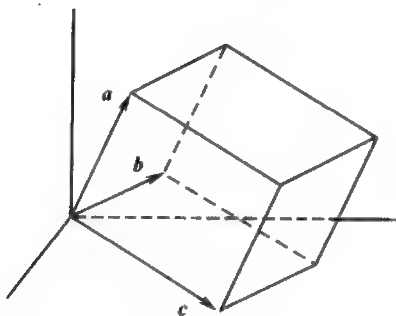
$$三角形的面积 = \left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR})\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left|\frac{5}{2}\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\right|$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4} + 4 + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{45}.$$

平行六面体的体积 设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为三维空间中的三个向量,它们决定了一个平行六面体.



这个立体的体积是

$$V = |\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})| = |d|,$$

其中

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{20.12}$$

例 20.24 求由 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 和 $2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 决定的平行六面体的体积.

按照(20.12)我们有

$$V = |\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{j}\times(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}))| = |\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k})| = 1.$$

值得提到,我们也能用计算行列式得到此结果:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

克拉默公式

对于叉积的最后一个应用,我们从几何转移到含三个未知量的三个线性方程的方程组上.于是,考虑方程组

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= m_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= m_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= m_3, \end{aligned} \tag{20.13}$$

其中 a_i,b_i,c_i 和 $m_i,i=1,2,3$,为已知常数.

利用向量

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3),\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,m_3),$$

我们首先把(20.13)表达为形式

$$\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}y+\boldsymbol{c}z=\boldsymbol{m}. \tag{20.14}$$

回想 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{b}$ 也垂直于 $\boldsymbol{c}$,是恒等式 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$ 的一个结论. 由方程(20.14)推出

$$(\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}y+\boldsymbol{c}z)\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = x\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

我们能以一种没有料到的出色的方式解出 x,

$$x=\frac{\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}.$$

类似地,有

$$y=\frac{\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}$$

和

$$z=\frac{\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}.$$

例 20.25 已知下面的线性方程组,解 x,

$$2x-y+z=1$$
$$3x+2y-z=-1$$
$$-x+y+2z=0.$$

利用上面描述的方法,我们不费力就得了一个解:

$$x=\frac{(1,-1,0)\cdot((-1,2,1)\times(1,-1,2))}{(2,3,-1)\cdot((-1,2,1)\times(1,-1,2))}=\frac{1}{10}.$$

§20.7 的习题

(1) 用你的CAS作顶点在$(1,-1,2)$,$(3,5,-2)$,$(-2,6,0)$的三角形的图. 求此三角形的面积.

(2) 求由向量$(1,2,-2)$和$(3,-4,1)$张成的平行四边形的面积. 用你的 CAS 画出此平行四边形.

计算下列由三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 张成的平行六面体的体积.

(3) $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{b}=(-2,3,2)$, $\boldsymbol{c}=(0,0,1)$.

(4) $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2,-1)$, $\boldsymbol{c}=(1,-1,9)$.

用克拉默公式解下面的三个三元方程的方程组. 用你的 CAS 检验你的答案.

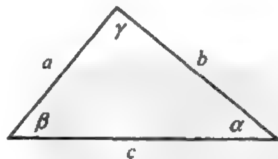
(5) $2x+4y+z=0$,
$x+y+3z=6$,
$3x-y+z=6$.

(6) $3x-y+z=3$,
$2x+y+4z=2$,
$-2x+3y-z=-7$.

(7) 证明 $|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|^2+|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|^2=|\boldsymbol{v}|^2|\boldsymbol{w}|^2$ 对任意两个向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 成立.

(8) 考虑右图中具边长 a,b,c,角 α,β,γ 的任意三角形.

推导正弦定律: $\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\beta)}{b}=\frac{\sin(\gamma)}{c}$. **提示**:设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为与此三角形各边相关的向量. 向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$,从而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{u}=0$.



(9) 证明 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 对任意三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 成立.

(10) 用你的 CAS 验证雅可比等式:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0.$$

(11) 证明对任意两个向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 有 $(2\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=0$.

第二十章的附加习题

(1) 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 的中点. 证明 AM 分对角线 BD 于三分之一处.

(2) 设 O 为 xy 平面的原点,并设$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \overrightarrow{OB} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}, \overrightarrow{OC} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$. 证明 ABC 是个直角三角形并求其面积.

(3) 两个向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的叉积为零意味了什么?

(4) 求由向量 $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ 决定的平行六面体的体积.

(5) 如果 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ 和 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = 0$,是否表明 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = 0$ 成立?

(6) 如果 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ 和 $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$,是否表明 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0$?

(7) 证明平行四边形的对角线相互平分. 求对角线与平行四边形边构成的三角形的面积.

(8) 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的一个向量三重积定义为 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$. 此向量垂直于 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

 (a) 关于向量三重积和向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 你能说些什么?

 (b) 证明存在常数 s 和 t 使得 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = s\boldsymbol{b} \times t\boldsymbol{c}$.

 (c) 用 $s, t, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 来表达 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 的事实.

 (d) 证明 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

 (e) 这个向量乘法可结合吗?

(9) 向量$\overrightarrow{OP}$有长度 $2a$,并指向水平线上向右 $60°$ 的方向. 什么向量与它组合起来产生一个长为 $2\sqrt{3}a$ 的竖直向量$\overrightarrow{OR}$?

(10) 如果 $\boldsymbol{u}$ 长度为 3 并水平地指向东方,而 $\boldsymbol{v}$ 为长度为 5 指向竖直的上方. 描述向量 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

(11) 力以一个向量表示. 在点 P 一个 1 磅的指向东方的拉力与什么样的力组合起来产生一个 2 磅的指向东北 $30°$ 的一个合成拉力?

(12) 证明 $\boldsymbol{i} \cdot (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{j} \cdot (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j})$.

(13) 证明$(\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})) \cdot (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = 1$. 给出一个联系到单位长立方体的几何解释并几何地证明这个结果.

(14) 求$(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ 和$(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$ 间的角.

(15) 证明$\boldsymbol{i}\cos(\alpha) + \boldsymbol{j}\sin(\alpha)$ 是一个有单位长度的在 Oxy 平面中的向量,而且它与 $\boldsymbol{i}$ 构成角 α. 那么,考虑此向量与相似的但与 $\boldsymbol{i}$ 构成角 β 的向量的叉积,并由此导出熟知的三角函数公式

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha).$$

使用克拉默公式解下列三元三方程组. 用你的 CAS 验证此结果.

(16) $2x + 3y + z = 14,$
$x + y + z = 6,$
$3x + 5y - z = 19.$

(17) $3x + 4y - z = -7,$
$x - y + z = 4,$
$-2x + 3y - 2z = -9.$

(18) $10x - y + 4z = 8,$
$-2x + y - 4z = -4,$
$x - 5y - 2z = 10.$

(19) $8x + y + 4z = -9,$
$24x - y - 3z = 3,$
$-8x + 3y + 8z = 9.$

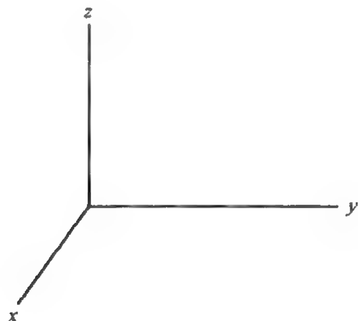
(20) $3x + 4y + 12z = 1,$
$x - y + z = 0,$
$12x - 2y + 6z = 3.$

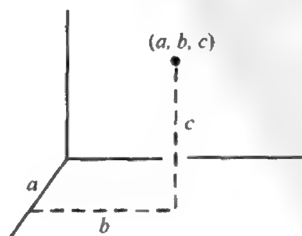
第二十一章　二维和三维图形

21.1　空间直线

向量理论的最有意义的应用是计算机辅助图形显示. 计算机作一个图是把小点放在屏幕上的许多格子点上. 格子点的数目越大则所得图形的清晰度越好.

让我们假定这个 CAS 屏幕有三条固定直线(轴) 被画出来以创造出三维空间的一种幻象. 按右手约定,这些轴在下图中被标以 x,y,z. 这三条轴决定了一个网格,对给出的一个任意格子点 (a,b,c),CAS 预先的编程便能够放置一个点在那里.



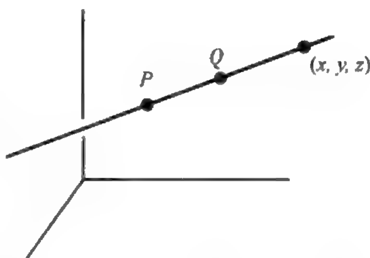


问题 我们如何得到更加复杂的三维对象的图形显示？

解 解决此问题的一般处理方法包括两个步骤. 首先必须用方程来描述所考虑的问题（自然，对各种二维图形前不久已经这样做了）. 一旦方程已知，我们便指令 CAS 放置点到适当的网格点上（这是方程规定的）来创造出所要的图像.

我们从直线开始进行三维图形探索（与第三章中开始二维图形研究时极其相像）.

例 21.1 什么是连接不同点 $P = (p_1, p_2, p_3)$ 和 $Q = (q_1, q_2, q_3)$ 的直线方程.



解决此问题的一个直接的方法是使用我们在第二十章中发展起来的向量理论. 考虑所讨论的直线，并设 (x, y, z) 为此直线上的任意点.

构造向量 $(x, y, z) - (p_1, p_2, p_3)$ 和 $(q_1, q_2, q_3) - (p_1, p_2, p_3)$. 显然这些向量相互平行（看得出它们都在同一直线上），因而它们只在长度上有差别，即存在某个实数 t 使得

$$(x - p_1, y - p_2, z - p_3) = t(q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3).$$

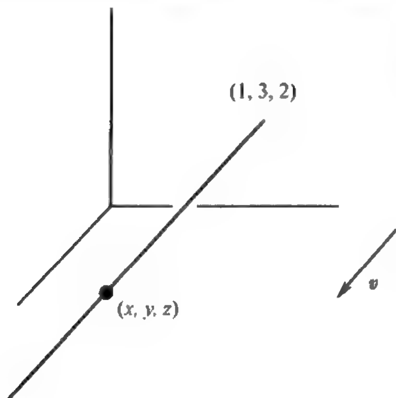
因此我们得到了方程

$$x = p_1 + (q_1 - p_1)t, y = p_2 + (q_2 - p_2)t, z = p_3 + (q_3 - p_3)t. \quad (21.1)$$

在让 t 跑遍实数集时所得到的点集由通过 P 和 Q 的整条直线组成. (21.1) 所给出的方程被称做**直线的参数方程**.

例 21.2 求通过点 $(1,3,2)$ 并平行于向量 $\boldsymbol{v} = (1, -2, -2)$ 的直线 l.

我们再次考虑所讨论曲线上的任意点 (x, y, z) 和向量 $\boldsymbol{w} = (x, y, z) - (1,3,2)$.



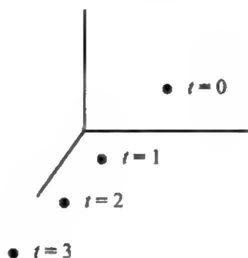
由于 w 在 l 上而 l 平行于 v，从而 w 自己平行于 v. 因此存在一个实数 t 使得

$$w = (x-1, y-3, z-2) = tv = t(1, -2, -2),$$

而直线 l 的参数方程为

$$x = 1 + t, y = 3 - 2t, z = 2 - 2t.$$

注意，直线的参数形式使我们能很快地得到这条直线上的点：令 $t = 0$ 我们得到 $(1,3,2)$，令 $t = 1$ 产生了 $(2,1,0)$，$t = 2$ 给出 $(3,-1,-2)$，最后如果 $t = 3$ 我们得到 $(4,-3,-4)$.



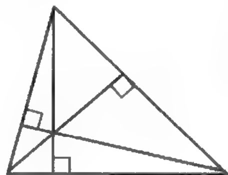
§21.1 的习题

对下面的每对点求通过这些点的直线的参数方程. 用下面的方法确认你的答案：(1) 画出原来的点（小圆点），(2) 在此直线上取出另一个点，以及 (3) 画出这三个点间的线段.

(1) $(1,3,0),(2,-4,0)$.　(2) $(-1,0,3),(2,0,8)$.　(3) $(1,1,2),(2,-4,0)$.

(4) $(0,-1,3),(4,-1,3)$.　(5) $(-2,9,-3),(4,0,8)$.　(6) $(-2,-1,-3),(1,2,3)$.

(7) 证明三角形（每边）上的三条高交于一个公共点.



(8) 证明在三维空间中所有满足方程

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

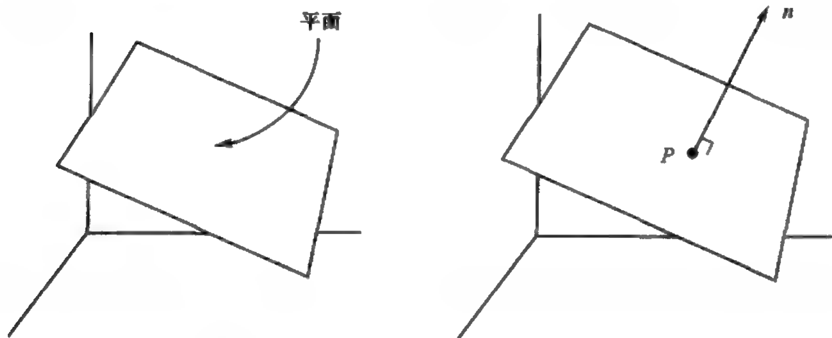
的点 (x,y,z) 的集合（其中 a,b,c,x_0,y_0,z_0 为固定的）在一条直线上. 把此直线方程表达为参数形式.（上面的那个形式被称做此直线的**对称形式**.）

21.2 平面——它们的方程和性质

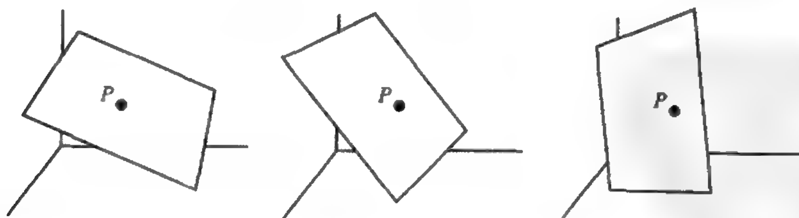
在成功推导出三维空间一条直线的方程后，我们转移到下一个最重要的作图对象，即平面. 一个平面是一个平坦的无限二维曲面，它可以形象地想像为一片巨大的薄薄的玻璃板.

提问 如何能对平面在数学上作出特征描述(即定义)?

回答 一个平面由平面上一个点 P 和垂直于此平面的一个(法)向量 $\boldsymbol{n}$ 决定.

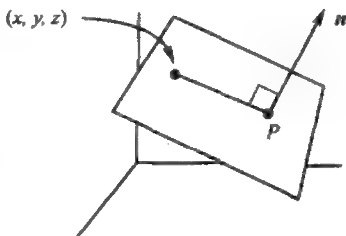


如果我们想像此平面被固定在一个点 P 上，则可以以无穷多个方向旋转此平面(三种情形被描绘于下).



在明确指定一个法向量 $\boldsymbol{n}$ 时我们便唯一决定了此平面的位置，因而确定了平面自身.

例 21.3 求通过点 $P=(p_1,p_2,p_3)$ 而垂直于 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ 的平面的方程.



设 (x,y,z) 是此平面上任一点. 由于向量 $(x,y,z)-(p_1,p_2,p_3)=(x-p_1,y-p_2,z-p_3)$ 在此平面上,故必定垂直于 $\boldsymbol{n}$. 回忆命题20.7,我们得到等式

$$(x-p_1,y-p_2,z-p_3)\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

从而所讨论的平面由方程

$$n_1(x-p_1)+n_2(y-p_2)+n_3(z-p_3)=0 \tag{21.2}$$

给出.

例 21.4 求通过点 $(1,-2,4)$ 并垂直于向量 $(2,-1,3)$ 的平面方程.

由方程(21.2) 我们知道此平面由

$$2(x-1)-(y+2)+3(z-4)=0.$$

给出,简化为方程

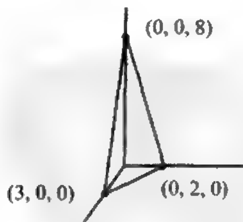
$$2x-y+3z=16.$$

例 21.5 找出平面 $2x-y+3z=16$ 上三个点.

自然在平面上有无穷多个点,它们全都满足方程 $2x-y+3z=16$. 我们的选择是随意的:如果 $x=0,y=0$ 则 $z=16/3$,如果 $x=1,z=5$,则 $y=1$,还有如果 $y=3,z=5$ 则 $x=2$. 最后的结论是点 $(0,0,16/3)$,$(1,1,5)$ 和点 $(2,3,5)$ 出现在此平面上.

例 21.6 求通过点 $(3,0,0)$,$(0,2,0)$ 和 $(0,0,8)$ 的平面方程.

我们需要一个法向量 $\boldsymbol{n}$ 来解决这个问题. 回想一下,两个向量的叉积垂直于原来的每个向量(定理 20.20),于是考虑自然存在于平面中的向量



$$(0,0,8)-(3,0,0) \text{ 和 } (0,0,8)-(0,2,0).$$

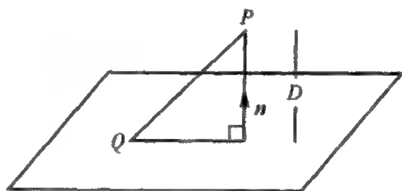
当我们取它们的叉积时得到了

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 16\boldsymbol{i}+24\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k},$$

这便是所要的此平面的法向量. 对点 $P=(3,0,0)$ 应用(21.2) 式,我们得到了此平面的方程

$$16x+24y+6z=48.$$

例 21.7(点到平面的距离)　设 $P=(p_1,p_2,p_3)$ 为空间中一点并设 $ax+by+cz=d$ 为一平面. 于是 $(a,b,c)=\boldsymbol{n}$ 是此平面的法向量. 设 $Q=(q_1,q_2,q_3)$ 为平面中任意点.



为求由 P 到平面的距离 D,必须首先构造一条通过 P 而垂直于此平面的直线. 做好此事之后,再去测出从 P 到平面的这个线段(在此直线上)的长度. 这个构造等同于计算向量 $\overrightarrow{PQ}$ 在法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影,于是所求距离由下面简洁的公式给出:

$$D=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}. \tag{21.3}$$

例 21.8　求点 $(2,-3,1)$ 到平面 $x-2y-z=4$ 的距离.

由(21.2),此平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-2,-1)$,它的长为 $|\boldsymbol{n}|=\sqrt{6}$. 选取平面上一点 Q,譬如 $Q=(0,0,-4)$,于是 P 到平面的距离由(21.3)给出:

$$\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{(2,-3,5)\cdot(1,-2,-1)}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

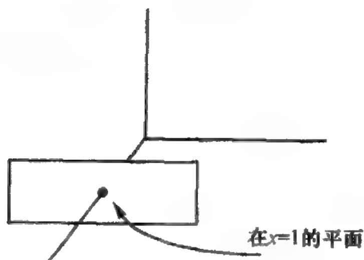
注　如果我在一个平面方程

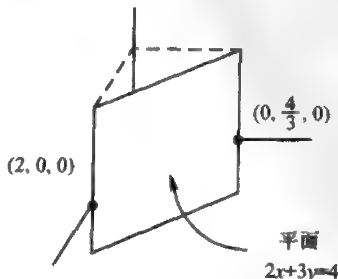
$$ax+by+cz=d$$

中固定一个变量,譬如 $z=z_0$,则形如 (x,y,z_0)(其中 $x,y\in\mathbb{R}$)的满足方程 $ax+by+cz_0=d$ 的点集形成了此平面中的一条直线.

例 21.9　画出平面 $2x+3y=4$ 和 $x=1$.

在这些例子中我们要画出满足方程的所有可能的三元组 (x,y,z). 因此尽管这些方程看起来像是二维空间中的直线,它们实际上是平面(关键要看上下行文). 但我们在第一个方程中令 $z=0$,把它化成了 xy - 平面中的一条直线. 这两个平面被描画在下面的图中.





注意,在 $x=1$ 的平面平行于 yz - 平面并只与 x 轴相交,而另一个平面与 z 轴不相交.

§21.2 的习题

求在下面每种情形下的平面方程.

(1) 通过 $(2,-3,1)$ 并垂直于向量 $(3,-2,4)$ 的平面.

(2) 通过 $(2,-3,1)$ 并垂直于向量 $(-1,4,2)$ 的平面.

(3) 通过点 $(-1,3,5)$, $(1,-2,4)$, $(-2,1,-8)$ 的平面.

(4) 通过点 $(2,-2,3)$, $(1,1,8)$, $(0,-1,-3)$ 的平面.

(5) 包含了直线 $x=1+t, y=2-t, z=3t$ 及点 $(1,-1,5)$ 的平面.

(6) 包含了直线 $x=3-2t, y=-1+3t, z=1+t$ 和点 $(-1,3,4)$ 的平面.

(7) 垂直于平面 $3x+y-2z=4$ 并通过点 $(0,0,1)$ 和 $(0,-1,0)$ 的平面.

确定下面的每对平面中哪一对是垂直的,平行的和交错的(即既不平行也不垂直).

(8) $2x-3y+z=11, 3x-3y-15z=2$.

(9) $2x-y+z=1, 6x-3y+3z=5$.

(10) $x-3y+3z=2, 5x-y-2z=7$.

(11) $7x-y-z=8, 2x+3y+11z=2$.

求下列每对平面之间夹角的余弦.

(12) $3x-7y+2z=2, -5x+y+4z=-2$.

(13) $8x+y-z=1, 2x-3y+2z=4$.

(14) $x-5y+2z=4, x-3y=13$.

(15) $z=1, x-3y+z=4$.

在下面习题中求点 P 到所给平面的距离.

(16) $P=(1,-1,5)$, 平面: $3x-y+4z=3$.

(17) $P=(0,1,2)$, 平面: $2x+y-z=5$.

(18) $P=(1,-1,3)$, 平面: $2x+4y+z=1$.

(19) $P=(3,-1,2)$, 平面: $x+y+z=100$.

(20) 证明从点 $P=(p,q,r)$ 到平面 $ax+by+cz=d$ 的距离是

$$\frac{|ap+bq+cr-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

(21) 求两个平面 $2x-4y+4z=8$ 和 $8x+7y+z=2$ 的相交直线的方程.

(22) 平面 $ax+by+cz=d_1$ 和平面 $ax+by+cz=d_2$ 总是平行的. 证明这两平面间的距离为

$$\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

(23) 设 $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ 和 $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ 为任两个相交的平面. 证明(对任意的 m, n)

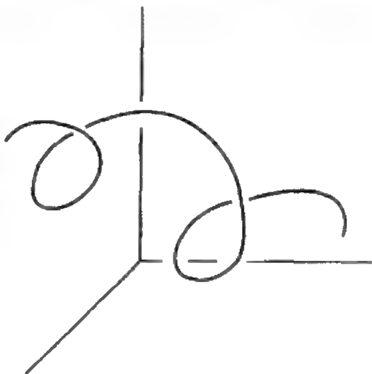
$$(ma_1+na_2)x+(mb_1+nb_2)y+(mc_1+nc_2)z=md_1+nd_2$$

是通过原来两平面交线的平面方程的最一般的形式.

21.3　空间曲线

我们要分析的下一类几何对象被称做**空间曲线**，即在三维空间中扭曲和翻转的一维曲线.

提问　我们如何从数学上描述空间曲线?



回答　为了探索这个问题我们先从简单的例子开始. 在 §21.1 中我们导出了三维空间中一条直线的方程，并且发现一条直线上的每个点(x,y,z)必定具有形式

$$x = a_1 + b_1 t, y = a_2 + b_2 t, z = a_3 + b_3 t,$$

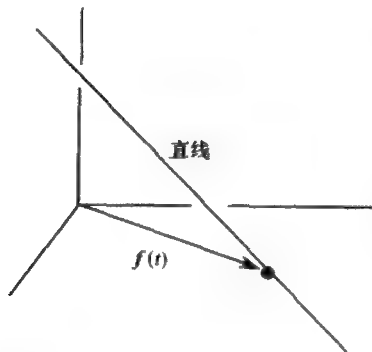
其中a_i, b_i为固定常数$(i = 1,2,3)$，$t \in \mathbb{R}$. 当t在实数上变化时，点

$$(a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t)$$

构成了这条直线. 因此我们可以定义**向量函数**

$$\boldsymbol{f}(t) = (a + b_1 t)\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2 t)\boldsymbol{j} + (a_3 + b_3 t)\boldsymbol{k},$$

对每个实数t它产生了一个向量，其终点(我们假定此向量被固定在原点)是此直线上的t－点.



这个例子启发出下面的定义.

定义　一个**向量函数**$\boldsymbol{f}(t)$是一个规则，它对每个实数t指定一个唯一的向量$\boldsymbol{f}(t)$. 定义函数$\boldsymbol{f}(t)$的图像为点$\boldsymbol{f}(t)$的集合，其中t在实数上变化.(另外一种

替代的说法是，如果我们使像向量 $f(t)$ 从原点开始，则此图像由在映像中的向量集合的端点组成.）

回忆函数原来定义的一般性（在第一章有叙述），我们看出向量函数不是别的，只不过是一类特殊的函数. 实际上我们可以下列方式构造出最一般的向量函数. 选取三个实数值函数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$. 最一般的向量函数 $f(t)$ 必定有形式

$$f(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}.$$

定义 一个向量函数

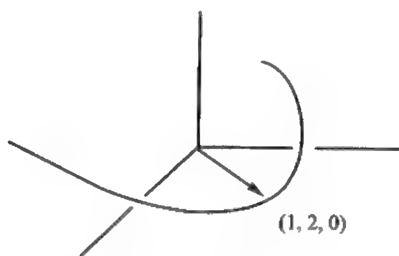
$$f(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

的图像被称做**空间曲线**. 称空间曲线是**连续的**是说函数 $x(t)$，$y(t)$ 和 $z(t)$ 自身是连续的.

例 21.10 设 $x(t) = t^2$，$y(t) = 1 + t$，$z(t) = 1 - t^2$. 向量函数

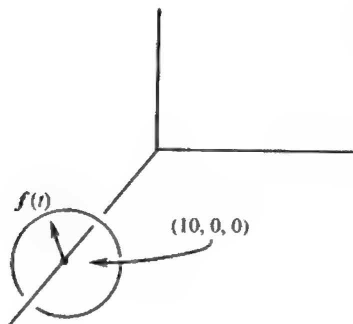
$$f(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

的图像被描绘于下.



例 21.11 曲线 $f(t) = 10\boldsymbol{i} + \cos(t)\boldsymbol{j} + \sin(t)\boldsymbol{k}$ 是个圆心在点 $(10, 0, 0)$ 半径为 1 的圆.

要看出下面的圆



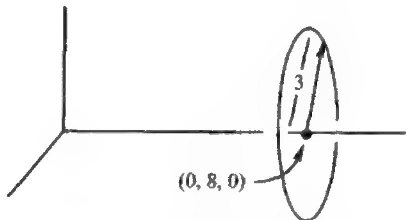
实际上是这个向量函数的图像,注意有

$$\begin{aligned}|f(t)-(10,0,0)| &= |\cos(t)\boldsymbol{j}+\sin(t)\boldsymbol{k}| \\ &= \sqrt{(\cos(t))^2+(\sin(t))^2} \\ &= 1.\end{aligned}$$

因此此曲线上每个点与点(10,0,0)的距离为1,从而必是这个画出来的圆.

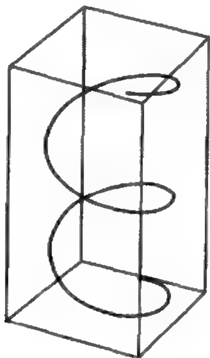
例 21.12 构造一个向量函数,使其图像为中心在(0,8,0),半径为3的圆,并位于平行于 xz - 平面中.

这个例题中的函数 $\boldsymbol{f}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$ 是例21.11中函数的修正形式. 由于假定此圆平行于 xz - 平面,函数 $y(t)$ 必定与 t 无关. 因此我们想要的函数是 $\boldsymbol{f}(t)=3\cos(t)\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+3\sin(t)\boldsymbol{k}$.



例 21.13(螺旋线) 函数 $\boldsymbol{f}(t)=\cos(t)\boldsymbol{i}+\sin(t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$ 的图像被称做圆形螺旋线.

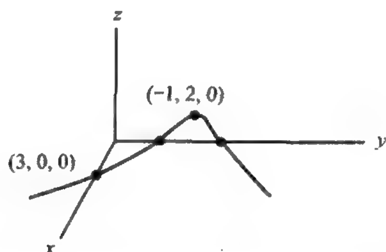
注 如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是 t 的任意实函数,则向量函数 $\boldsymbol{f}(t)=(x(t),y(t),0)$ 代表了 xy - 平面中的一条曲线.



例 21.14　描画并识别由函数

$$f(t)=(t^2-1)\boldsymbol{i}+(t+2)\boldsymbol{j}$$

代表的空间曲线.



如上面注明的那样,此曲线位于 xy - 平面中. 让我们画出一些点:

$$f(0)=(-1,2,0),$$
$$f(1)=(0,3,0)$$
$$f(-1)=(0,1,0)$$
$$f(2)=(3,4,0)$$
$$f(-2)=(3,0,0).$$

当我们画出这些点时,在 xy - 平面中出现了一条抛物线. 自然要问此抛物线的方程在标准形式下是什么样子. 这容易得到:由于 $x=t^2-1, y=t+2$, 故 $t=y-2$, 我们推出

$$x=(y-2)^2-1.$$

§21.3 的习题

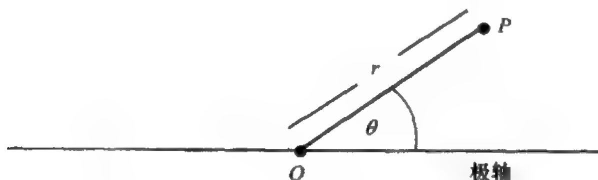
(1) 求图像为半径 4, 中心 (7,0,0) 并位于平行于 yz - 平面的平面中的圆的向量函数.
(2) 求图像为半径 2, 中心 (0, -5,0) 并位于平面 $y=-5$ 中的圆的向量函数.
画出下面向量函数.
(3) $f(t)=(t,0,1+2t)$.　(4) $f(t)=\cos(t)\boldsymbol{i}+\sin(t)\boldsymbol{j}+e^t\boldsymbol{k}$.
(5) $f(t)=(1,t^2,2-t)$.　(6) $f(t)=\frac{1}{t}\boldsymbol{i}+(t+1)\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$.

21.4　极坐标和柱面坐标

在用一对或三个实数分别代表二维和三维空间中一个点的过程中,我们详

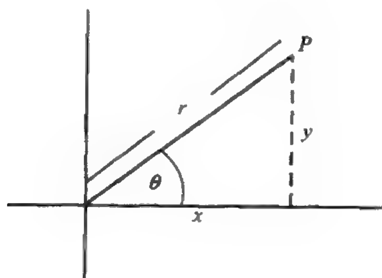
细说明了什么叫一个**坐标系**. 为了展示图像的目的,有时使用其他的坐标系会更方便. 我们现在介绍其他两个可用的坐标系,即极坐标和柱面坐标.

极坐标　在平面中固定一个点 O(原点) 和一条通过 O 的直线(极轴).

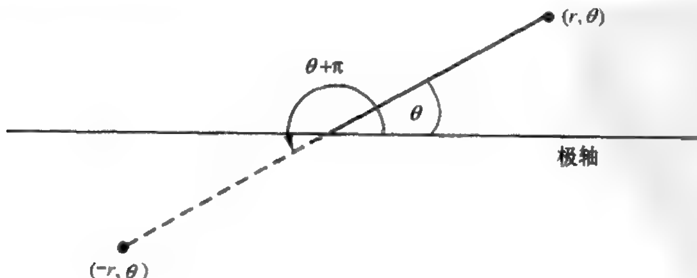


于是平面中每个点 P 可以由一个对(r,θ) 明确界定,其中 $r \geqslant 0$ 为 O 到 P 的距离, θ 是直线 OP 与极轴之间的角(以弧度度量). 如果选取极轴为 xy - 平面中的 x 轴,那么我们可以看出极坐标为(r,θ) 的点 P 也可由笛卡儿坐标(x,y) 给出,其中

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta). \tag{21.4}$$



我们可以推广极坐标的定义,定义$(-r,\theta)(r>0)$ 为点$(r,\theta+\pi)$.



例 21.15　将点$(5,2\pi/3)$转换为笛卡儿坐标.

应用方程(21.4)我们有

$$x = 5\cos(2\pi/3) = -5/2, \quad 以及 \quad y = 5\sin(2\pi/3) = 5\sqrt{3}/2.$$

因此笛卡儿坐标(或直角坐标)为$(-5/2,5\sqrt{3}/2)$.

在直角坐标中我们考虑并分析函数$y = f(x)$和它们的图像. 在考虑函数$r = f(\theta)$和它们的图像时我们也能发展出一个可类比的理论. 变换(21.4)使我们能在两个坐标系之间自由变动.

例 21.16　把函数$y = x^2$表达为极坐标的函数.

用变换(21.4)我们可表示$y = x^2$为

$$r\sin(\theta) = r^2\cos^2(\theta).$$

因此这个标准的抛物线由函数

$$r = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}$$

描述.

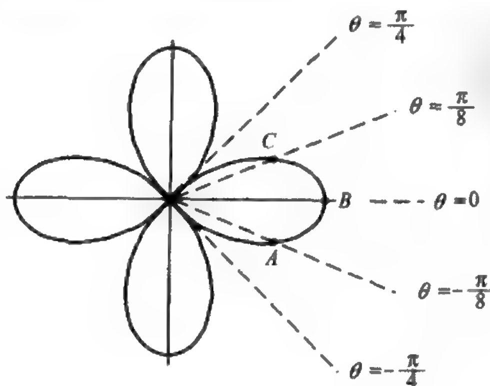
提问　最初等的极函数是什么?

回答　最简单的极函数有形式$r = c$,其中c为常数. $r = c$的图形简简单单地是个半径为c的圆. 注意,这个圆在直角坐标中不能被说成是一个函数的图像. $r = c$的直角坐标形式引出了后面的方程;因为$x = r\cos(\theta)$,$y = r\sin(\theta)$,我们有

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

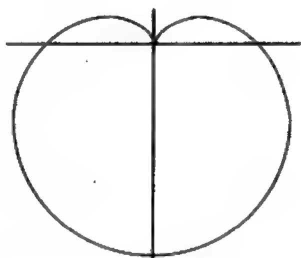
因此方程$r = c$等价于方程$x^2 + y^2 = r^2$.

例 21.17(四瓣玫瑰线)　极函数$r = \cos(2\theta)$的图像是下面的**四瓣玫瑰曲线**.



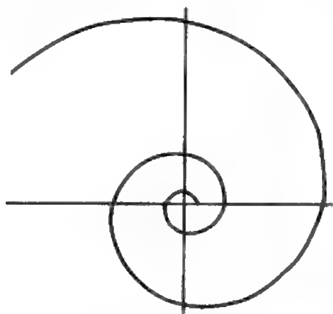
作为说明的例子，让我们看看最右边的一瓣是怎样画出来的. 当 $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$, $r = 0$. 当 $\theta = \pm\frac{\pi}{8}$, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 当 $\theta = 0$, $r = 1$. 我们已画出了花瓣上的 A, B, C 点. 注意，我们开始于原点 $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$ 而终结于原点 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

例 21.18（心形线） 考虑函数 $r = a(1 - \sin\theta)$，其中 a 为常数. 其图像叫做**心形线**.



要求出此方程的直角坐标形式我们可以写出 $y = r\sin(\theta)$，它表明 $r = a\left(1 - \frac{y}{r}\right)$ 或 $r^2 = a(r - y)$. 因此 $r^2 + ay = ar$，与 $r^2 = x^2 + y^2$ 结合得出了 $x^2 + y^2 + ay = a\sqrt{x^2 + y^2}$ 或者 $(x^2 + y^2 + ay)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

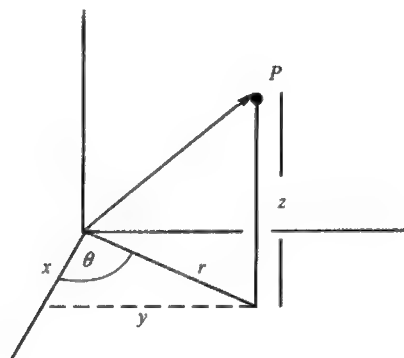
例 21.19（对数螺线） 考虑函数 $r = e^{a\theta}$, $a > 0$ 是个常数. 图像是条螺线.



可以清楚看出，当角 θ 增大时 r 的值指数式增大.

柱面坐标 在看到我们如何能够描述出以前不能轻易掌握的二维图形时，自然要力图将极坐标推广到三维空间. 于是，让 $P = (x, y, z)$ 为直角坐标下的一

个点.

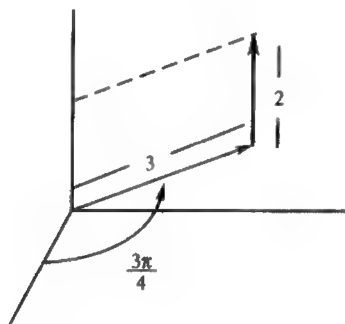


进行变换

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), z = z, \tag{21.5}$$

我们得到了在柱面坐标下的点(r,θ,z).

例 21.20 画出柱面坐标下的点$\left(3,\frac{3\pi}{4},2\right)$并转换它为直角坐标.



要转换为直角坐标我们使用(21.5):

$$x = 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, y = 3\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}, z = z.$$

§ 21.4 的习题

在习题(1) ~ (6) 中画出具已知极坐标的点,并画出 r 具相反符号的那个点.

(1) $r = 4, \theta = \frac{\pi}{3}$. (2) $r = 2, \theta = \frac{3\pi}{4}$. (3) $r = -3, \theta = \pi$.

(4) $r = 2, \theta = -\frac{\pi}{6}$. (5) $r = -2, \theta = \frac{\pi}{6}$. (6) $r = -5, \theta = -\frac{2\pi}{3}$.

(7) 在把极坐标转换为直角坐标(x,y)中证明

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(8) 证明极坐标下两点(r_1,θ_1)和(r_2,θ_2)之间的距离由下面公式给出:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}.$$

(9) 描绘极曲线 $r = 3(1 - 2\sin(\theta))$ 并求其直角坐标下的方程.

(10) 描绘曲线 $r = 2\sin(3\theta)$ 并求其直角坐标方程.

(11) 考虑直角坐标下的直线方程 $y = mx + b$. 将其转换为极方程.

(12) 描绘极曲线 $r = \frac{5}{\sin(\theta)}, 0 < \theta < \pi$ 并求其笛卡儿方程.

(13) 求两条极曲线 $r = 2(\cos(\theta))^2$ 和 $r = 2 - \sin(\theta)$ 的交点.

(14) 求曲线$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 3) = y^2$的极方程.

(15) 设 A,B 为满足 $AB \neq 0$ 的常数. 证明极方程 $r = A\sin(\theta) + B\cos(\theta)$ 总代表了一个圆.

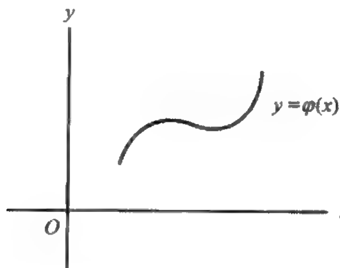
下面的点由柱面坐标给出. 画出它们并转换其为直角坐标.

(16) $\left(2, \frac{2\pi}{3}, 5\right)$. (17) $\left(1, -\frac{\pi}{4}, -2\right)$. (18) $(5,0,1)$.

(19) $\left(-2, \frac{\pi}{2}, 1\right)$. (20) $\left(-3, -\frac{3\pi}{2}, 2\right)$. (21) $\left(2, \frac{4\pi}{3}, -6\right)$.

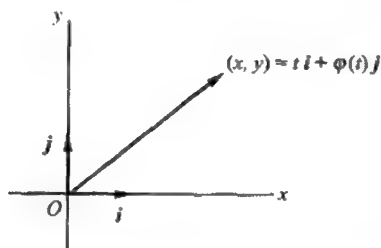
21.5 极(坐标)函数到向量函数的转换

设 $y = \varphi(x)$ 代表 Oxy 平面上的一条曲线.



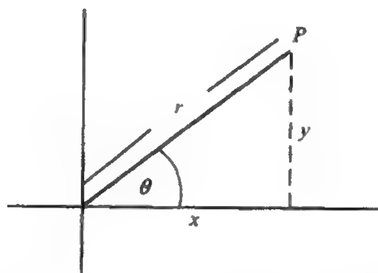
我们可以将其转换为以变量 t 参数化的空间曲线,即令 $x = t$ 及 $y = \varphi(t)$. 于是

在笛卡儿平面上点(x,y)可以作为向量$ti + \varphi(t)j$的末端端点实现，而这时的向量已被假定固定于原点 O.



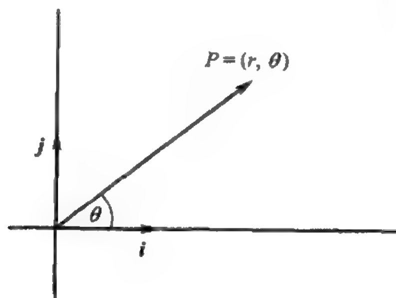
提问　如果给了一个极形式函数$r = f(\theta)$，如何将其作为向量函数相伴的空间曲线来实现？

回答　回忆在极坐标下的点(r,θ)可以经过令$x = r\cos(\theta)$，$y = r\sin(\theta)$转换为直角坐标.



注意到从原点出发而终止于点$P = (r,\theta)$的箭头也就是向量

$$\overrightarrow{OP} = r\cos(\theta)i + r\sin(\theta)j.$$



因此极函数 $r = f(\theta)$ 可以作为空间曲线

$$\begin{aligned} g(\theta) &= r\cos(\theta)\boldsymbol{i} + r\sin(\theta)\boldsymbol{j} \\ &= f(\theta)\cos(\theta)\boldsymbol{i} + f(\theta)\sin(\theta)\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

来实现.

例 21.21 将例 21.17 的四瓣玫瑰线转换为空间曲线.

四瓣玫瑰线由方程 $r = \cos(2\theta)$ 给出,因此相伴的向量函数简单地变为 $g(\theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta)\boldsymbol{i} + \cos(2\theta)\sin(\theta)\boldsymbol{j}$.

例 21.22 将三瓣玫瑰线 $r = \cos(3\theta)$ 转换为 yz - 平面中的空间曲线.

为了把三瓣玫瑰线放在 yz - 平面中, 我们令 $y = \cos(3\theta)\cos(\theta)$ 和 $z = \cos(3\theta)\sin(\theta)$. 于是

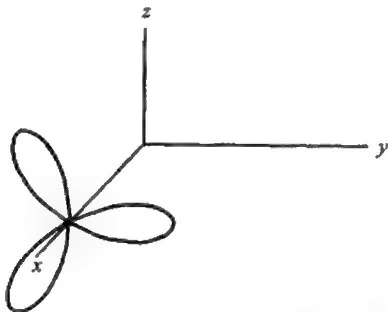
$$g(\theta) = \cos(3\theta)\cos(\theta)\boldsymbol{j} + \cos(3\theta)\sin(\theta)\boldsymbol{k}.$$

就做成了.

例 21.23 将三瓣玫瑰线置于平面 $x = 5$,且中心在点(5,0,0).

向量值函数 $f(\theta) = \cos(3\theta)\cos(\theta)\boldsymbol{j} + \cos(3\theta)\sin(\theta)\boldsymbol{k}$ 在平面 $x = 0$ 上产生出一条三瓣玫瑰线. 为了得到这条曲线所要的位置我们必须用向量(5,0,0)作平移. 得到的向量函数是

$$(5,0,0) + f(\theta) = 5\boldsymbol{i} + \cos(3\theta)\cos(\theta)\boldsymbol{j} + \cos(3\theta)\sin(\theta)\boldsymbol{k}.$$

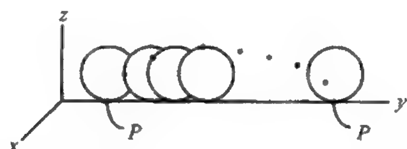


例 21.24 按顺时针方向在平面 $x = 5$ 中旋转上例中的 3 瓣玫瑰线 15°,求其向量函数方程.

由于 $15° = \frac{\pi}{12}$ 弧度,所要的旋转只不过是变换 $\theta \to \theta + \frac{\pi}{12}$. 得到的向量函数为

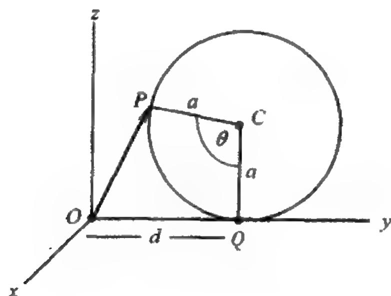
$$5\boldsymbol{i} + \cos\left(3\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right)\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right)\boldsymbol{j} + \cos\left(3\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right)\boldsymbol{k}.$$

例21.25(旋轮线)　想像一个圆(位于平面 $x = 0$ 中)它在 y 轴上无滑动地滚动.



在圆上确定一个点 P,考虑当圆滚动时此点经过的路径(称其为**旋轮线**). 假定此圆半径为 $a > 0$,求图像为此旋轮线的向量函数.

假定圆的开始位置是 P 点在原点 O. 假设圆已滚动了某个距离 $d \leqslant 2\pi a$.



注意,由定义,距离 d 与弧长 QP 相同,因此 $d = a\theta$. 因此在滚动距离 d 之后的 P 点位置由角 θ 决定.

我们所要寻求的函数必定输入与圆已经滚动的距离相伴的角,而输出一个从原点出发而终止于 P 点所在位置的向量,即 $\boldsymbol{f}(\theta) = \overrightarrow{OP}$. 要明显地计算 $\boldsymbol{f}(\theta)$,我们使用向量等式

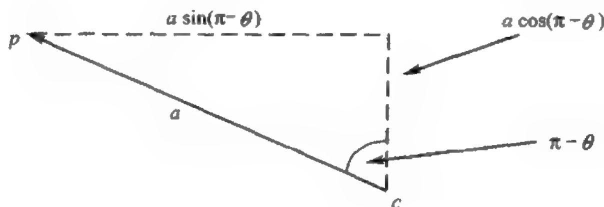
$$\boldsymbol{f}(\theta) = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CP}. \tag{21.6}$$

这个和中的头两个向量容易识别:

$$\overrightarrow{OQ} = d\boldsymbol{j} = a\theta\boldsymbol{j}, \overrightarrow{QC} = a\boldsymbol{k}.$$

要计算用 θ 表出的 $\overrightarrow{CP}$,我们利用辅助三角形. 由此我们知道了 $\overrightarrow{CP} = -a\sin\theta\boldsymbol{j} - a\cos(\theta)\boldsymbol{k}$. 因此(21.6) 有形式

$$\boldsymbol{f}(\theta) = a(\theta - \sin(\theta))\boldsymbol{j} + a(1 - \cos(\theta))\boldsymbol{k}.$$



§21.5 的习题

在下列习题中用你的 CAS 画出所有的向量函数.

(1) 考虑极曲线 $r = 4\sin(5\theta)$,它是个五瓣玫瑰线. 求向量函数使它的图像为放在平面 $z = -3$ 内,中心在$(0,0,-3)$ 的这朵玫瑰.

(2) 求向量函数,它使得习题(1) 中的五瓣玫瑰曲线在平面$z = -3$中逆时针方向旋转了45°.

(3) 考虑由 $r = \left(\frac{\theta}{3}\right)^2, 0 \leqslant \theta \leqslant 4\pi$ 给出的称做螺线的极曲线. 求向量函数,使得它的图像为放在 $x = 1$ 平面中的这条螺线,并使极点 $r = 0, \theta = 0$ 平衡到了点$(1,6,6)$.

(4) 求向量函数,它使得习题(3) 中的螺线在平面 $x = 1$ 中按顺时针旋转了 60°.

(5) 求向量函数,它以向量$(-1,-6,1)$ 平移了习题(3) 中的螺线.

(6) 一个圆沿x轴无滑动地滚动. 求向量函数,使其图像为圆上固定点 P 勾画出的旋轮线. 你可设 P 的初始位置在原点.

第二十一章的附加习题

(1) 求长为 4 且垂直于向量$(2,2,2)$ 和$(1,0,-1)$ 的向量.

(2) 已经知道如果平面 P 为 $ax + by + cz + d = 0$,则(a,b,c) 是平面 P 的法向量. 它的长度为 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. 平面 P 的方程可以在要求法向量具单位长的条件下法化. 设 $\boldsymbol{n}$ 为这样的向量,因而 $\boldsymbol{n} = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 平面 P 的法化方程可表示为 $\boldsymbol{n} \cdot (x,y,z) = e$. 证明如果 $\boldsymbol{n} \cdot (x,y,z) = e$ 是平面 P 的法化方程,M 为任一点, 则 M 到 P 的距离为 $|e - \boldsymbol{n} \cdot (m_1,m_2,m_3)|$,其中 $M = (m_1,m_2,m_3)$.

(3) 求由下列点到指的平面或直线的距离.

(a)$(1,0,-1)$;$(1,1,1) \cdot (x,y,z) = 1$.

(b)$(1,0,-1)$;$2x + 3y + z = 1$.

(c)$(1,2)$;$(3,4) \cdot (x,y) = 0$.

(4) 决定平面 $2x+3y+z=0$ 与 $6x+9y+3z=0$ 是否平行.

(5) 决定直线

$$x=2+5t$$
$$y=1+2t$$
$$z=4+t$$

是否平行于平面 $x+2y-9z=10$.

(6) 求平面 $x+3y+2z=6$ 与 $3x+y-z=6$ 的相交直线的参数方程并求这两平面间的角.

(7) 在你的 CAS 上作函数 $f(t)=4\cos(t)\boldsymbol{i}+4\sin(t)\boldsymbol{j}, 0\leqslant t\leqslant\pi$ 的图. 什么是一个坐标用另一个坐标表示的函数形式?

(8) 以 $f(t)=(4t-t^2)\boldsymbol{i}+(4t^2-t^3)\boldsymbol{j}$ 重复习题(7).

(9) 在你的 CAS 上作函数 $f(u)=\frac{1}{1+u}\boldsymbol{i}+(\sqrt{u}+1)\boldsymbol{j}$ 的图. 求其直角坐标方程.

(10) 以 $f(u)=\frac{1}{1+u}\boldsymbol{i}+\frac{u}{1-u^2}\boldsymbol{j}$ 重复习题(9).

(11) 从柱面坐标转换成直角坐标:

(a) $(3,\pi/6,4)$.

(b) $(5,5\pi/3,-1)$.

(c) $(1,5\pi/3,0)$.

(12) 在你的 CAS 上求出由下面条件决定的区域:

(a) $0\leqslant\theta\leqslant\pi/3, 0\leqslant r\leqslant\cos(\theta), 0\leqslant z\leqslant 5$.

(b) $r=4\sin(\theta), 0\leqslant z\leqslant 5$.

(c) $\theta=\pi/3, 0\leqslant z\leqslant 1$.

(13) 在你的 CAS 上求出由下面方程描述的区域:

(a) $f(t)=\cos(t)\boldsymbol{i}+\sin(t)\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

(b) $f(t)=t\cos(t)\boldsymbol{i}+t\sin(t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}, t\geqslant 0$.

在你的 CAS 上作 $f(t)$ 的图像并指出当 t 增加时的方向.

(14) $f(t)=3t\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k}$

(15) $f(t)=3\cosh(t)\boldsymbol{i}+3\sinh(t)\boldsymbol{j}$.

(16) $f(t)=3t\exp(-t)\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{k}$.

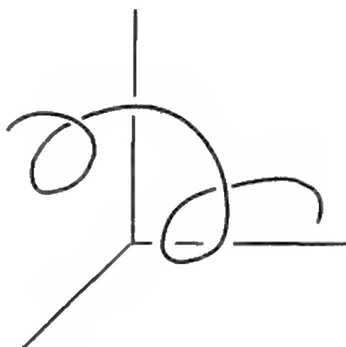
(17) $f(t)=3\cos(t)\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\cos(t)\boldsymbol{k}$.

(18) $f(t)=2\cos(2t)\boldsymbol{i}+2\sin(2t)\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.

第二十二章　向量函数的微积分

22.1　向量函数的导数

设 $\boldsymbol{f}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$ 为一向量函数，其中 $x(t)$，$y(t)$ 和 $z(t)$ 是变量 t 的实函数.



提问　我们如何定义导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{f}(t)$（它也表示为 $\boldsymbol{f}'(t)$）？

回答　直观上说，只有唯一一种可行的方式定义这个导数. 假定下面的极限存在，我们定义向量函数的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{f}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t)}{h}.$$

注意,由此定义,$\boldsymbol{f}(t)$ 的导数可以用 $x(t)$,$y(t)$ 和 $z(t)$ 的导数按下面的简单方式表示:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{f}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\boldsymbol{i}+\lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\boldsymbol{j}+\lim_{h\to 0}\frac{z(t+h)-z(t)}{h}\boldsymbol{k} \tag{22.1}$$

$$=x'(t)\boldsymbol{i}+y'(t)\boldsymbol{j}+z'(t)\boldsymbol{k}.$$

例 22.1　计算空间曲线的导数,此曲线为

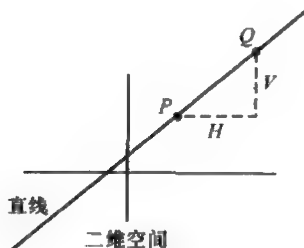
$$\boldsymbol{f}(t)=\cos(t)\boldsymbol{i}+(t^5-3t^2+2)\boldsymbol{j}+\mathrm{e}^{t^2}\boldsymbol{k}.$$

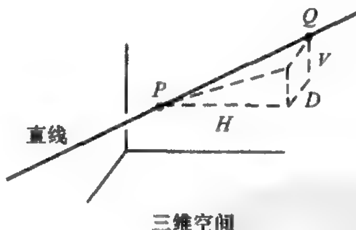
按照(22.1)我们看到

$$\boldsymbol{f}'(t)=-\sin(t)\boldsymbol{i}+(5t^4-6t)\boldsymbol{j}+2t\mathrm{e}^{t^2}\boldsymbol{k}.$$

提问　我们如何解释空间曲线的导数?它是切线的斜率吗(在某种广泛的意义上)?

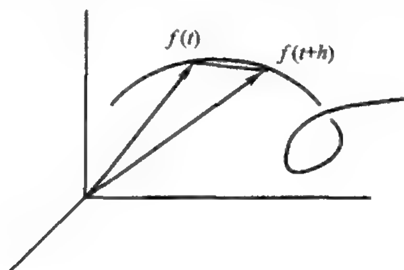
回答　在三维空间中切线斜率的概念是不存在的.要明白这点让我们回忆在二维空间,切线的斜率是当从直线上点 P 走向点 Q 时的竖直距离与水平距离的比值 $\frac{V}{H}$.



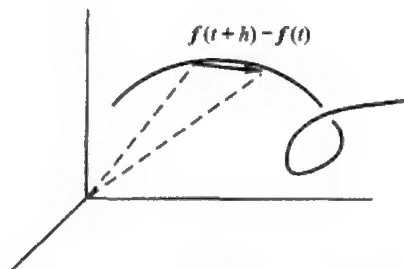


在三维空间中,如果从 P 点走向 Q 点,不仅走过了一个水平距离 H 和一个竖直距离 V,还有一个纵深距离 D.因此对高于 2 维的情形没有斜率的自然类比.

尽管如此,导数 $\boldsymbol{f}'(t)$ 最终还是个向量,它本身在点 t 切于曲线 $\boldsymbol{f}(t)$.这可由查验下面的图示明白.



向量 $\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t)$ 描画于下.



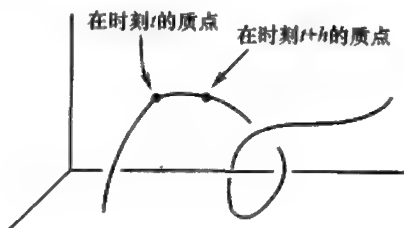
当 $h\to 0$ 时向量 $\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t)$ 的方向趋向曲线的切线方向,而且由于除以纯量 h 改变了向量的长度但不改变它的方向,故

$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t)}{h}$$

产生了一个向量,它在点 t 切于空间曲线 $\boldsymbol{f}(t)$.

提问 已知一个可微的向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$,此导数的长 $|\boldsymbol{f}'(t)|$ 有什么意义?

回答 为了解决这个问题让我们假定变量 t 代表时间而一个质点沿此空间曲线运动. 在时刻 t 的质点位置不过是 $(x(t),y(t),z(t))$. 于是 $|\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t)|$ 就是质点在时刻 $t+h$ 和时刻 t 的位置间的距离.



在除以h时我们得到了距离的变化与时间的变化的比率,即质点的平均速度.因此$|f'(t)|$是在时刻t时此质点的瞬时速度.

例 22.2 考虑空间曲线

$$f(t) = (t^2, 1+t, 2-3t).$$

计算$f'(1)$和$|f'(1)|$.求在$t=1$的切线方程.

因为$f'(t) = (2t, 1, -3)$,我们看到$f'(1) = (2, 1, -3)$,因此

$$|f'(1)| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}.$$

所考虑的切线必通过点$(1,2,-1)$并平行于向量$f'(1) = (2,1,-3)$.因此此切线的参数形式可简单地表示为

$$x(t) = 1+2t, y(t) = 2+t, z(t) = -1-3t.$$

我们在第7章中所遇到的微分规则很快地推广到向量函数.具体地说,设$f(t)$,$g(t)$为可微向量函数,$u(t)$为t的可微实函数.下列的断言可由CAS验证,并将其留给感兴趣的读者.

$$\frac{d}{dt}(f(t) \pm g(t)) = f'(t) \pm g'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(u(t)f(t)) = u'(t)f(t) + u(t)f'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(f(t) \cdot g(t)) = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(f(t) \times g(t)) = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$$

$$\frac{d}{dt}f(u(t)) = u'(t)f'(u(t)).$$

§ 22.1 的习题

对下列每个向量函数$f(t)$求在指定的点上的切线.用你的CAS画出此空间曲线和切线.在习题(1)~(6)中求这些曲线在指定的点上的法线(即在指定点垂直于切线的直线,它并不被唯一定义).在空间曲线和这条切线的图上添加法线的图形.

(1) $f(t) = (1+5t^2, 2-t, 1+7t), t = 0.$

(2) $f(t) = (t^3, -3+t^2, 1+t), t = 2.$

(3) $f(t) = (3, 2\cos(t), 2\sin(t)), t = \frac{\pi}{4}.$

(4) $f(t) = (3\cos(t), 7, 2\sin(t)), t = \frac{3\pi}{2}.$

(5) $f(t) = (\sin(t), \cos(t), e^{\frac{t}{5}}), t = 4\pi.$

(6) $f(t) = (t^2, \sin(2t), e^{\frac{t}{4}}), t = 3\pi.$

22.2 积分和弧长

已经定义了向量函数

$$f(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

的导数,现在我们用一种类比的方式定义不定积分和定积分:

$$\int f(t)\,dt = \left(\int x(t)\,dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int y(t)\,dt\right)\boldsymbol{j} + \left(\int z(t)\,dt\right)\boldsymbol{k},$$

以及

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\boldsymbol{j} + \left(\int_a^b z(t)\,dt\right)\boldsymbol{k}.$$

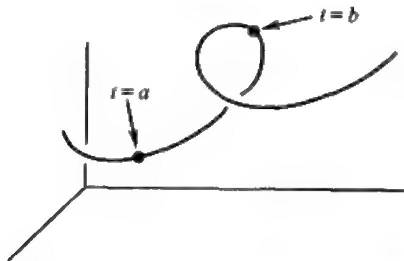
例 22.3 计算$\int_0^2 (3t^2\boldsymbol{i} + (t-2)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k})\,dt.$

按照积分的定义可计算于后:

$$\int_0^2 3t^2\,dt\boldsymbol{i} + \int_0^2 (t-2)\,dt\boldsymbol{j} + \int_0^2 e^t\,dt\boldsymbol{k} = t^3\boldsymbol{i} + \left(\frac{t^2}{2} - 2t\right)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}\Big|_0^2$$

$$= 8\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + (e^2 - 1)\boldsymbol{k}.$$

设$f(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$为任意连续的空间曲线,其图画于下.



自然要问,我们如何计算$t = a$和$t = b$之间的曲线段的弧长L. 由于我们是在三维空间中讨论,空间曲线当t从a增加到b时可能会经过多于一次(注意,在二维空间函数的图像不会发生这种情况),意识到这点是重要的. 因此必须小心地把我们的注意力限制在那些在区间$a \leqslant t \leqslant b$上曲线只经过一次的情形.

命题 22.4 设$f(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$为一连续的空间曲线,使得此曲线在区间$a \leqslant t \leqslant b$上只经过一次. 于是此曲线在这区间上的长$L$由

$$L=\int_a^b |\boldsymbol{f}'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\mathrm{d}t \tag{22.2}$$

给出.

在验证这个结果之前值得在一些例子和应用上花些时间.

例 22.5　求螺旋线 $\boldsymbol{f}(t)=\cos(t)\boldsymbol{i}+\sin(t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$ 在 $0\leqslant t\leqslant 6$ 的弧长.

由于 $\boldsymbol{f}'(t)=-\sin(t)\boldsymbol{i}+\cos(t)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的长度为

$$|\boldsymbol{f}'(t)|=\sqrt{(\sin(t))^2+(\cos(t))^2+1}=\sqrt{2},$$

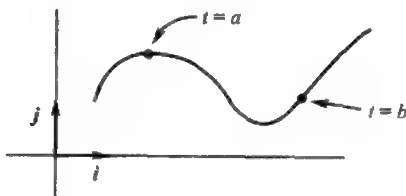
故所要的弧长由

$$L=\int_0^5 \sqrt{2}\mathrm{d}t=5\sqrt{2}$$

给出.

实际上,命题 22.4 在维数异于 3 时仍有效. 例如,考虑二维空间中一个向量函数

$$\boldsymbol{f}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}.$$



当 t 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上时的曲线段的弧长 L 由下面积分给出:

$$L=\int_a^b |\boldsymbol{f}'(t)|\mathrm{d}t. \tag{22.3}$$

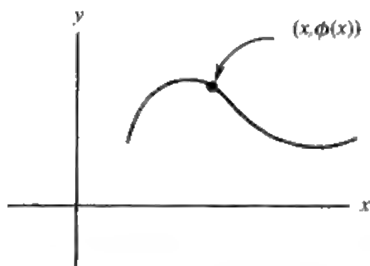
例 22.6　计算半径 R 的圆的周长 C.

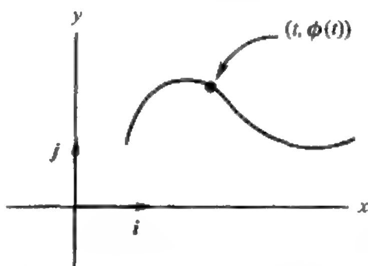
如同我们在多种场合看到的那样,有许多种方式得到 C 的值. 在这里我们先把此圆表示为由向量函数 $\boldsymbol{f}(t)=R\cos(t)\boldsymbol{i}+R\sin(t)\boldsymbol{j}$ 所实现的空间曲线,由此,周长可由我们的命题容易地算出:

$$C=\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\sin(t))^2+R^2(\cos(t))^2}\mathrm{d}t=\int_2^{2\pi} R\mathrm{d}t=2\pi R.$$

例 22.7　设 $y=\phi(x)$ 为 x 的连续实函数. 证明在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上,$\phi(x)$ 的弧长 L 可由下面公式给出:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(\phi'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

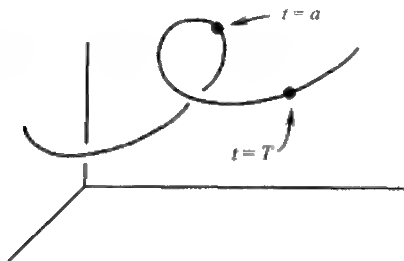


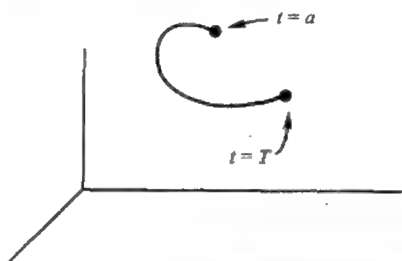


这个弧长公式完全就是公式(16.4),并在第十六章中费了一定的精力验证过.用向量函数的理论我们立刻可从(22.2)推出(16.4),这只要原来的函数写成参数形式就可以了.事实上函数 $y = \phi(x)$ 可实现为空间曲线 $\boldsymbol{f}(t) = (t,\phi(t))$.

注意 $\boldsymbol{f}'(t) = (1,\phi'(t))$ 和 $|\boldsymbol{f}'(t)| = \sqrt{1 + (\phi'(t))^2}$,于是(22.3)是显然的了.

弧长公式的推导 固定一个基点 $t = a$,并设 $L(T)$ 代表空间曲线在 $t = a$ 和 $t = T$ 之间那一段的长度.于是 $L(T)$ 是画在下面右图的那段弧的长.





注意 $L(a) = 0$ 而 $L(t+h) - L(t)$ 被向量 $\boldsymbol{f}(t+h) - \boldsymbol{f}(t)$ 的长所近似.因此当我们除以 h 时得到商

$$\frac{L(t+h) - L(t)}{h} \approx \left|\frac{\boldsymbol{f}(t+h) - \boldsymbol{f}(t)}{h}\right|,$$

于两端令 $h \to 0$,得到

$$L'(t) = |\boldsymbol{f}'(t)|.$$

对两边同时积分得出所要公式

$$L(b) = L(b) - L(a) = \int_a^b L'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |\boldsymbol{f}'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

§ 22.2 的习题

计算下列积分.

(1) $\int[(t^3-1)\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+(e^t-1)\boldsymbol{k}]dt$.

(2) $\int[\cos(t)\boldsymbol{i}+\ln(t)\boldsymbol{j}+e^t\boldsymbol{k}]dt$.

(3) $\int[(te^{-t})\boldsymbol{i}+\sqrt{t+1}\boldsymbol{j}+t^4\boldsymbol{k}]dt$.

计算下列空间曲线在指明的区间上的长度. 用你的 CAS 作这些曲线的图.

(4) $\boldsymbol{f}(t)=t\boldsymbol{i}+2t-1\boldsymbol{j}+1-t\boldsymbol{k},(-1\leqslant t\leqslant 2)$.

(5) $\boldsymbol{f}(t)=\left(\frac{t^3}{6}+\frac{1}{2t}\right)\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j},(1\leqslant t\leqslant 3)$.

(6) $\boldsymbol{f}(t)=5\sin(t)\boldsymbol{i}+7t\boldsymbol{j}+5\cos(t)\boldsymbol{k},(0\leqslant t\leqslant 10)$.

(7) $\boldsymbol{f}(t)=\ln(t)\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k},(2\leqslant t\leqslant 5)$.

(8) $\boldsymbol{f}(t)=\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\boldsymbol{i}+\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k},(0\leqslant t\leqslant 1)$.

(9) $\boldsymbol{f}(t)=2\sin(t)\boldsymbol{i}+2\ln(\cos(t))\boldsymbol{j}+2\cos(t)\boldsymbol{k},\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$.

对下列的每个实函数,求代表它们的空间曲线并在指定的区间上计算其弧长.

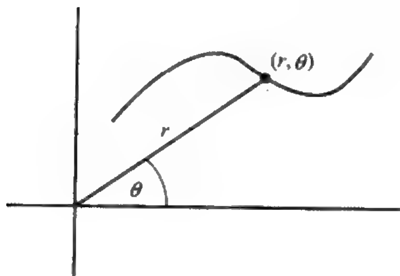
(10) $y=(x-1)^{\frac{3}{2}},(2\leqslant x\leqslant 4)$.

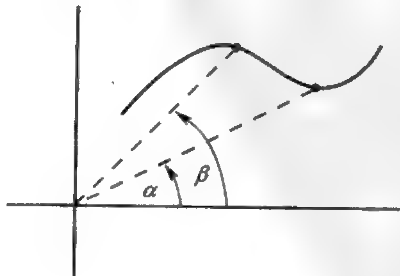
(11) $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x},(1\leqslant x\leqslant 3)$.

(12) $y=e^x,(0\leqslant x\leqslant 2)$.

22.3　极坐标下的弧长和面积

设 $r=f(\theta)$ 为以极形式给出的函数.





设 L 代表此曲线在 $\theta = \alpha$ 与 $\theta = \beta$ 之间的一段的弧长. 在将 $f(\theta)$ 从极形式转换为向量函数

$$\boldsymbol{g}(\theta) = f(\theta)\cos(\theta)\boldsymbol{i} + f(\theta)\sin(\theta)\boldsymbol{j}$$

时,我们可用命题 22.4 计算 L:

$$L = \int_a^b |\boldsymbol{g}'(\theta)|\,\mathrm{d}\theta.$$

现在

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}'(\theta) &= (f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta))\boldsymbol{i} + (f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta))\boldsymbol{j},\\ &= (r'\cos(\theta) - r\sin(\theta))\boldsymbol{i} + (r'\sin(\theta) + r\cos(\theta))\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

从而

$$|\boldsymbol{g}'(\theta)|^2 = (r'\cos(\theta) - r\sin(\theta))^2 + (r'\sin(\theta) + r\cos(\theta))^2 = (r')^2 + r^2.$$

概括起来,我们已证明:

命题 22.8 *具极方程 $r = f(\theta)$ 的曲线在 $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ 的长度 L 由*

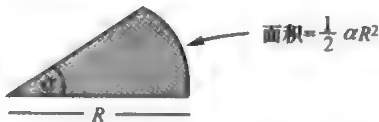
$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

例 22.9 求四瓣玫瑰线 $r = \cos(2\theta)$ 的一瓣的长度.

令 $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$,我们便能画出此玫瑰的一瓣. 因此弧长 L 由积分给出:

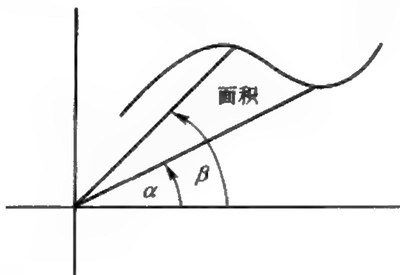
$$L = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\cos(2\theta))^2 + 4(\sin(2\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

回想我们曾指出过半径 R 的圆的面积为 πR^2. 相似地, 半圆的面积为 $\frac{1}{2}\pi R^2$,四分之一圆的面积为$\frac{1}{4}\pi R^2$. 更为一般地,一个角为 $\alpha, 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$,半径为 R 的扇形的面积由$\frac{1}{2}\alpha R^2$ 给出.



警示 在圆的扇形面积的公式中千万不要省去系数$\frac{1}{2}$.

再回到我们的极曲线 $r = f(\theta)$. 令 A 代表下面图示的面积:



我们断言此面积由下面积分给出：

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2 \mathrm{d}\theta. \tag{22.4}$$

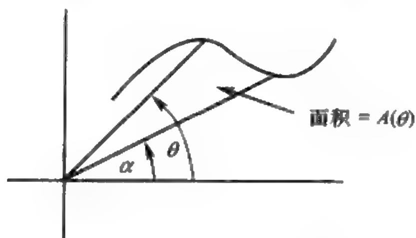
例 22.10 计算三瓣玫瑰线 $r = \sin(3\theta)$ 中一瓣的面积.

此玫瑰一个单瓣出现在我们在 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{3}$ 上作函数图时. 因此所要的面积由

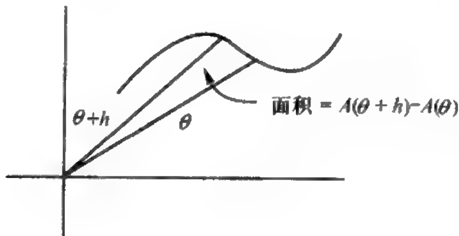
$$A = \int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2} (\sin(3\theta))^2 \mathrm{d}\theta$$

给出.

要验证(22.4)，我们先固定 α，并设 $A(\theta)$ 代表画在下面的那块面积.



显然 $A(\alpha) = 0$. 把 θ 看作变量并考虑 h 充分小，以及差 $A(\theta + h) - A(\theta)$. 由定义，这个差代表了下面那个薄薄的楔形的面积，



它近似于一个半径为 $r = f(\theta)$，角为 h 的圆的扇形. 因此

$$A(\theta + h) - A(\theta) \approx \frac{1}{2}hf(\theta)^2.$$

两边同除以 h 并让 $h \to 0$，我们便得到显式表达的 A 的导数：

$$A'(\theta) = \lim_{h \to 0} \frac{A(\theta + h) - A(\theta)}{h} = \frac{1}{2}f(\theta)^2.$$

同时在此方程两边对 θ 积分得到方程(22.4).

§22.3 的习题

用你的 CAS 画出下列玫瑰的一瓣. 对每一种情形，用积分来表示这一瓣的面积和弧长. 用你的 CAS 计算这些积分.

(1) $r = 4\cos(4\theta)$.　(2) $r = 2\cos(8\theta)$.　(3) $r = 7\cos(5\theta)$.

(4) $r = 2\cos\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.　(5) $r = 4\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{9}\right)$.　(6) $r = 3\cos(-7\theta)$.

在习题(7) ~ (9) 中用你的 CAS 画出弧线. 对每种情形计算弧长.

(7) $r = e^{\frac{1}{3}\theta}$，对 $-10 \leqslant \theta \leqslant 10$.

(8) $r = 5\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2$，对 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

(9) $r = (\tan(\theta))^2$，对 $-\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$.

(10) 求由 $r^2 = 9(1 + 3(\sin(\theta))^2)$，$-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ 围成的面积.

(11) 求由抛物线 $r = \frac{3}{1 - \cos(\theta)}$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 和直线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 围成的面积.

(12) 求蚶线 $r = \frac{1}{2} + \cos(\theta)$ 中较小的那个圈的面积.

(13) 求同时在曲线 $r = \sin(2\theta)$ 和 $r = \sin(\theta)$ 内部的那个区域的面积.

(14) 求在曲线 $r = 3(1 + \cos(\theta))$，$-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ 内而在曲线 $r^2 = 4(1 + \cos(\theta))$，$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ 外的那个区域的面积.

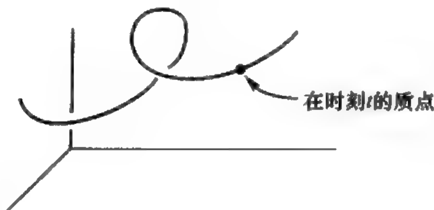
22.4　方向和曲率

现在让我们回过头来考虑通过三维空间并沿着空间曲线运动的质点；设此空间曲线通过自身不超过一次.

假定此曲线是一个**光滑的**向量函数

$$f(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

(即 $f(t)$ 为无限次可微并且除了可能在所考虑的已知区间端点外处处不为零)我们已经证明过 $f'(t)$ 是此曲线的一个切向量,其长度是此质点在时刻 t 的速度. 所作假定 $f'(t) \neq 0$ 让我们可以考虑向量



$$T(t) = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \frac{f'(t)}{v(t)},$$

我们称其为**单位切向量**. 单位这个词源于 $T(t)$ 具长度 1 的事实,即 $T(t)$ 自身的点积为 1:

$$T(t) \cdot T(t) = 1. \tag{22.5}$$

提问 $T'(t)$ 有什么性质?

回答 我们断言向量 $T'(t)$ 总是垂直于 $T(t)$,因而它被叫做**法向量**. 要明白确为如此,只要证明点积

$$T'(t) \cdot T(t) = 0$$

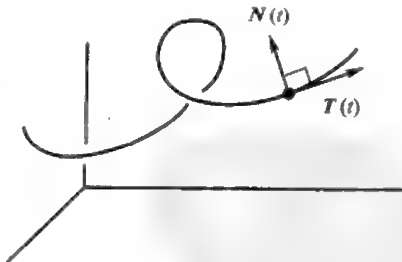
就可以了. 这个等式由(22.5)得到,只要我们在(22.5)的两边对 t 取微分:

$$\frac{d}{dt}(T(t) \cdot T(t)) = T'(t) \cdot T(t) + T(t) \cdot T'(t) = 0,$$

因此

$$2T'(t) \cdot T(t) = 0.$$

找到了一个法向量,但我们想要一个长度为 1 的. 按照产生长度为 1 的切向量的方法,我们定义



$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

为**单位法向量**. 图形上看,向量 $T(t)$ 与 $N(t)$ 在空间曲线上相互垂直且都具有长度 1.

例 22.11 设 $f(t) = \cos(t)i + 2tj + \sin(t)k$ 为空间曲线. 求 $T(t)$ 和 $N(t)$.

先计算

$$f'(t) = -\sin(t)i + 2j + \cos(t)k,$$

这时我们看到

$$|f'(t)| = \sqrt{(\sin(t))^2 + 4 + (\cos(t))^2} = \sqrt{5}.$$

由定义

$$T(t) = \frac{-\sin(t)}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{j} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}.$$

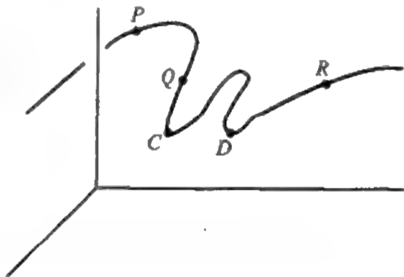
现计算 $N(t)$. 首先对 $T(t)$ 微分:

$$T'(t) = -\frac{\cos(t)}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} - \frac{\sin(t)}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}.$$

于是 $T'(t)$ 有长度$\frac{1}{\sqrt{5}}$,从而

$$N(t) = -\cos(t)\boldsymbol{i} - \sin(t)\boldsymbol{k}.$$

曲率 曲率的概念是对一个基本的和直观的感觉所进行的公式化的界定. 任一运动中的物体(一辆汽车,自行车,飞机等等)都经历了各种的转弯. 某些转弯很急,有些则完全没有引起注意. 在下面的空间曲线的一个抽象样图中,我们看到在点 C, D 的曲率(拐弯的总量)是大的,而在点 P, Q,R 曲线实际上相当平直.



问题 如何度量在一个点的曲率.

估算在一点的曲率的一种办法是看附近点的单位切向量的情况. 譬如,在 P 点附近的单位切向量近乎完全一样. 另一方面,当我们注意 C 附近的点时,切向量的方向显然在不断地改变,甚至当我们沿曲线只有细微的移动时也是如此.

因此要度量曲率我们必须度量沿此曲线运动时单位切向量的方向的变化. 为使这个观察精确化,我们首先在此光滑空间曲线

$$f(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

上固定一个**基点** $t = a$. 设 $s = s(t)$ 代表 a 和 t 之间的弧长. 于是 $s(t)$ 是个一对一的函数(因为 a 与 t 之间的距离只能有一个值),它由下面的积分给出:

$$s(t) = \int_a^t |f'(t)|\mathrm{d}t = \int_a^t v(t)\mathrm{d}t.$$

由于 $s(t)$ 是一对一的,故它有逆,我们记其为 $t = \varphi(s)$. 因而我们可以写成

$$f(t) = f(\varphi(s)),$$

称此为 f 相对于弧长的参数化. 这样做了之后,我们现在能够讨论 f 相对于弧长变量 s 的变化率(即导数)了.

定义　设 $\boldsymbol{f}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ 为一光滑曲线，并通过自身任何部分只有一次. 在 t 的曲率 $\kappa(t)$ 定义为

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(t)}{\mathrm{d}s}\right|.$$

为了能容易地算出曲率，我们先应用链规则得出

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(t)}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

又由于 $s(t) = \int_0^t (\boldsymbol{f}'(t))\mathrm{d}t$，微积分基本定理给出了

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{f}'(t)| = v(t).$$

因此我们得到曲率的另一个（有用的）形式：

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{v(t)}. \tag{22.6}$$

例 22.12　证明直线的曲率为 0.

通过固定点 (x_0, y_0, z_0) 的最一般直线的空间曲线为

$$\boldsymbol{f}(t) = (x_0 + at)\boldsymbol{i} + (y_0 + bt)\boldsymbol{j} + (z_0 + ct)\boldsymbol{k},$$

其中 a, b, c 为常数. 因此 $\boldsymbol{f}'(t) = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$，所以在点 t 的单位切向量为

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}).$$

由于 $\boldsymbol{T}'(t) = \boldsymbol{0}$ 故其曲率为 0.

例 22.13　证明半径为 R 的圆的曲率为 $\frac{1}{R}$.

在 xy - 平面中圆心在原点半径为 R 的圆可以实现为空间曲线

$$\boldsymbol{f}(t) = R\cos(t)\boldsymbol{i} + R\sin(t)\boldsymbol{j}.$$

因此 $\boldsymbol{f}'(t) = -R\sin(t)\boldsymbol{i} + R\cos(t)\boldsymbol{j}$ 是个长度 R 的切向量. 在点 t 的单位切向量由

$$\boldsymbol{T}(t) = -\sin(t)\boldsymbol{i} + \cos(t)\boldsymbol{j},$$

因此 $\boldsymbol{T}'(t) = -\cos(t)\boldsymbol{i} - \sin(t)\boldsymbol{j}$ 也具有长度 1. 于是方程(22.6) 规定了其曲率为

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{v(t)} = \frac{1}{R}.$$

§ 22.4 的习题

对下列空间曲线求 $\boldsymbol{T}(t)$，$\boldsymbol{N}(t)$，$\kappa(t)$. 用CAS画出这些空间曲线以及从它们出发的向量 $\boldsymbol{T}(t)$ 和 $\boldsymbol{N}(t)$. 从图形上确认这些向量是垂直的.

(1) $\boldsymbol{f}(t) = \sin(2t)\boldsymbol{i} + 5t\boldsymbol{j} + \cos(2t)\boldsymbol{k}$.

(2) $\boldsymbol{f}(t) = e^{t}\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j} + \sqrt{2}t\boldsymbol{k}$.

(3) $\boldsymbol{f}(t) = \ln(\cos(t))\boldsymbol{i} + \cos(t)\boldsymbol{j} + \sin(t)\boldsymbol{k}$.

(4) $\boldsymbol{f}(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \left(t + \frac{t^3}{3}\right)\boldsymbol{k}$.

(5) 对习题(4) 的空间曲线求曲率 $\kappa(0)$(即在 $t = 0$). 点 $A = \boldsymbol{f}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{11}{24}, \frac{1}{4}, \frac{13}{24}\right)$ 和 $B = \boldsymbol{f}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{11}{24}, \frac{1}{4}, -\frac{13}{24}\right)$ 靠近点 $\boldsymbol{f}(0) = (0,0,0)$. 求通过 A,B 点且半径为 $\frac{1}{\kappa(0)}$ 的圆的方程. 用你的 CAS 画出此圆和此空间曲线. 这些曲率在 $t = 0$ 的附近相匹配吗?

(6) 用你的 CAS 证明空间曲线 $\boldsymbol{f}(t)$ 的曲率 $\kappa(t)$ 由公式

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{f}'(t) \times \boldsymbol{f}''(t)|}{|\boldsymbol{f}'(t)|^3}$$

给出.

(7) 证明在平面曲线 $y = f(x)$ 的特殊情形,曲率 $\kappa(t)$ 由

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(8) 计算 $y = e^x$ 在一般点(x,y) 的曲率. 对 x 的哪些值曲率为极大?

(9) 设 $f(t) > 0$,$g(t)$ 为 t 的可微实函数. 证明空间曲线

$$\boldsymbol{f}(t) = \int f(t)\sin(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{i} + \int f(t)\cos(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{j} + \int f(t)g(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{k}$$

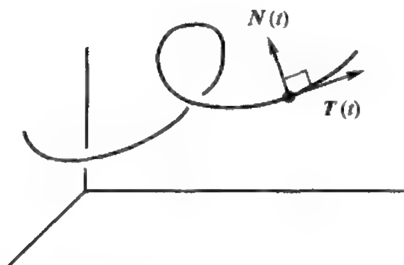
有曲率

$$\kappa(t) = \frac{1}{f(t)}\sqrt{\frac{1 + g(t)^2 + (g'(t))^2}{(1 + g(t)^2)^3}}.$$

22.5 速度和加速度

当一个人环绕一条曲线驾车前行,如果他要维持常速,则他必须要加速并同时把汽车转向到垂直于此曲线的切向量的方向. 这个基本的观察具有一个现

在要阐述的数学模型. 设 $\boldsymbol{f}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ 为一光滑的空间曲线,其图形为一运动质点画出. 设 $\boldsymbol{T}(t)$ 和 $\boldsymbol{N}(t)$ 分别为此质点在时刻 t 的单位切向量和单位法向量.



正如我们已经看到的,速度向量简单地表为

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{f}'(t) = v(t)\boldsymbol{T}(t),$$

其中 $v(t)$ 是瞬时速度. 加速度向量的自然定义是速度向量的导数,

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{v}'(t) = v'(t)\boldsymbol{T}(t) + v(t)\boldsymbol{T}'(t). \tag{22.7}$$

从直观上看加速度应当部分依赖于曲率.

命题 22.14 *设 $a(t) = \boldsymbol{v}'(t)$,则加速度向量可表示为和*

$$\boldsymbol{a}(t) = a(t)\boldsymbol{T}(t) + \kappa(t)v(t)^2\boldsymbol{N}(t)$$

证明 将单位法向量的定义 $\boldsymbol{T}'(t) = |\boldsymbol{T}'(t)| \cdot \boldsymbol{N}(t)$ 与方程(22.6) $|\boldsymbol{T}'(t)| = \kappa(t)v(t)$ 结合起来,我们得到了等式

$$\boldsymbol{T}'(t) = \kappa(t)v(t)\boldsymbol{N}(t).$$

从而(22.7) 成为

$$\boldsymbol{a}(t) = v'(t)\boldsymbol{T}(t) + \kappa(t)v(t)^2\boldsymbol{N}(t).$$

用 $a(t)$ 代替 $v'(t)$(称它为瞬时加速度),命题得证.

注 简明陈述命题 22.14 的通常方式是说,$\boldsymbol{a}(t)$ 有一个 $\boldsymbol{T}(t)$ 方向的分量 $a(t)$(或称为**切向分量**) 和在 $\boldsymbol{N}(t)$ 方向的分量 $\kappa(t)v(t)^2$(或**法向分量**).

例 22.15 一辆自行车绕一半径 R 的圆转动,此圆由空间曲线

$$\boldsymbol{f}(t) = R\sin(t)\boldsymbol{i} + R\cos(t)\boldsymbol{j}$$

表示,计算 $\boldsymbol{T}(t)$,$\boldsymbol{N}(t)$,$\boldsymbol{v}(t)$,$\boldsymbol{a}(t)$ 和加速度分量.

首先我们知道

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}(t)}{\mathrm{d}t} = R\cos(t)\boldsymbol{i} - R\sin(t)\boldsymbol{j},$$

因而

$$v(t) = |\boldsymbol{v}(t)| = R,$$
$$a(t) = v'(t) = 0.$$

另外,

$$\boldsymbol{T}(t) = \cos(t)\boldsymbol{i} - \sin(t)\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{T}'(t) = -\sin(t)\boldsymbol{i} - \cos(t)\boldsymbol{j}$$

以及

$$\boldsymbol{N}(t) = -\sin(t)\boldsymbol{i} - \cos(t)\boldsymbol{j}.$$

回想从例 22.13 中有 $\kappa(t) = \frac{1}{R}$,我们有了

$$\boldsymbol{a}(t) = a(t)\boldsymbol{T}(t) + \kappa(t)v(t)^2\boldsymbol{N}(t) = R\boldsymbol{N}(t).$$

因此在绕圆转动时没有切向加速度. 唯一的加速度是在方向 $\boldsymbol{N}(t)$,它指向圆心.

作为本章的总结,我们重新叙述各种已导出的公式. 这张表可作参考之用,同时也为了增进对此材料的认识.

基本公式概览

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}(t)}{\mathrm{d}t}, \quad v(t) = |\boldsymbol{v}(t)|,$$
$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{v}(t)}{v(t)}, \quad \boldsymbol{N}(t) = \frac{\boldsymbol{T}'(t)}{|\boldsymbol{T}'(t)|},$$
$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}, \quad a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$
$$s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t, \quad \kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{|\boldsymbol{v}(t)|},$$
$$\boldsymbol{a}(t) = a(t)\boldsymbol{T}(t) + \kappa(t)v(t)^2\boldsymbol{N}(t).$$

§22.5 的习题

在习题(1) ~ (4) 中用你的 CAS 画出空间曲线 $\boldsymbol{f}(t)$. 计算加速度向量的切和法分量.

(1) $\boldsymbol{f}(t) = 8\boldsymbol{i} + (2t^2-3)\boldsymbol{j} + (t-2)\boldsymbol{k}$.

(2) $\boldsymbol{f}(t) = 3\sin(t)\boldsymbol{i} - 5t\boldsymbol{j} + 3\cos(t)\boldsymbol{k}$.

(3) $\boldsymbol{f}(t) = \sqrt{2}t\boldsymbol{i} + \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{j} + \mathrm{e}^{t}\boldsymbol{k}$.

(4) $\boldsymbol{f}(t) = \frac{1}{2}t^2\boldsymbol{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$.

(5) 假设地球位于原点(0,0,0),一颗通信卫星以椭圆轨道绕地球运行. 它的路径是空间曲线

$$\boldsymbol{f}(t) = 3\sqrt{2}\cos(\pi t)\boldsymbol{j} + 2\sqrt{2}\sin(\pi t)\boldsymbol{k}.$$

现设若一颗流星趋向地球，其路径为空间曲线

$$g(t) = \left(t - \frac{5}{4}\right)i + \left(t^2 - 3t - \frac{13}{16}\right)j + \left(t + \frac{3}{4}\right)k.$$

作地球的和卫星与流星在 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 的路径图. 你观察到了什么?在什么时刻 t 卫星与流星相碰撞?在碰撞时刻，计算下列的量：

(a) 流星与卫星路径之间的夹角.

(b) 流星的曲率.

(c) 卫星和流星的速度.

(d) 卫星和流星的加速度向量.

(6) 再次假定地球是个固定在原点(0,0,0) 的点. 一颗属于某国 A 的侦察卫星在以椭圆轨道绕地球运行，此轨道由空间曲线

$$f(t) = 5\cos\left(\frac{t\pi}{12}\right)i + 3\sin\left(\frac{t\pi}{12}\right)k$$

给出. 卫星绕地球整整一圈要花多少时间?假定国 A 的敌国 Z 想发射导弹以摧毁此卫星(导弹以常速从 $t = 0$ 起发射). 当它击中卫星时将启动一个爆炸装置. 导弹的路径必须是直线. 求正好在 3 小时后导弹直接命中的直线方程(作为空间直线). 用你的 CAS 画出卫星和导弹的空间曲线. 计算(在碰撞时刻) 下列的量.

(a) 卫星和导弹路径间的夹角.

(b) 卫星的曲率.

(c) 卫星和导弹的速度.

(d) 卫星和导弹的加速度向量.

(7) 设一质点以常速运动. 证明加速度向量的方向必定与单位法向量 $N(t)$ 的方向相同.

(8) 证明加速度向量的长度为 $\sqrt{v'(t)^2 + \kappa(t)^2 v(t)^2}$.

第二十二章的附加习题

(1) 设 $f(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. 在你的 CAS 上描绘由 f 给出的曲线和在(1/2,1/4,1/8) 的切线，再求 $|f'(t)|$. 最后假定 t 通过整个 $\mathbb{R}$，在 f 描出的曲线上哪些点的切向量垂直于向量(2,2,1)，求出所有点.

(2) 证明，如果可微向量函数 f 在 $u \leqslant t \leqslant v$ 永不为零，则

(a) $f \cdot \dfrac{df}{dt} = |f|\dfrac{d|f|}{dt}$.

(b) f 为常值当且仅当 $f \cdot f' = 0$.

(c) f 具有不变方向当且仅当 $f \times f' = 0$.

(3) 在你的 CAS 上描绘由 $(x,y) = (t^3, t^5)$ 表示的曲线并指出这个参数化使其在原点没有切向量. 求另一个参数化使其在原点有切向量.

(4) 证明如果 $\boldsymbol{g}(t)$ 对 $t\in\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中取值,并且如果对 $a\leqslant t\leqslant b$ 有 $\boldsymbol{g}'(t)=0$,则在此区间上 $\boldsymbol{g}(t)$ 为常值向量. **提示**:对每个坐标函数用中值定理.

(5) 设 $\boldsymbol{f}(t)=(\cos(t),\sin(t),1)$. 在你的 CAS 上描绘此曲线的图形并描述此曲线的切向量,对于向量 $(\cos(t),\sin(t),0)$,你能对它的方向说些什么?

求出下列参数方程给出的曲线的长度.

(6) $\boldsymbol{f}(t)=\left(t^2,\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t\right),0\leqslant t\leqslant 3.$

(7) $\boldsymbol{f}(t)=(6t^2,\sqrt{2}t^3,t^4),-1\leqslant t\leqslant 2.$

(8) $\boldsymbol{f}(t)=(\cos(t),\sin(t),t),0\leqslant t\leqslant\pi.$

(9) $y=x^{2/3},0\leqslant x\leqslant 5.$

(10) $r=\exp(2t),\theta=t,z=\exp(2t);0\leqslant t\leqslant\ln(2).$

(11) 用弧长 s 作为变量求圆的参数方程(回想圆的方程为 $x=a\cos(t),y=a\sin(t),0\leqslant t\leqslant 2\pi$).

(12) 用弧长 s 作为变量求由 $\boldsymbol{f}(t)=(a\cos(t),a\sin(t),ct),t\geqslant 0$ 给出的曲线的参数方程.

(13) 求用弧长 s 为变量的由 $\boldsymbol{f}(t)=(\sin(\exp(2t)),\cos(\exp(2t)),\sqrt{3}\exp(2t)),t\geqslant 0$ 给出的曲线的参数方程.

(14) 求在圆 $r=2\cos(\theta)$ 外部而在心形线 $r=2+2\cos(\theta)$ 内部的那块区域的面积.

(15) 求被曲线 $3\sin(\theta)$ 和 $3\cos(\theta)$ 围成的面积.

(16) 证明 $\boldsymbol{f}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 所刻画的曲线的曲率由

$$\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{f}'(t)\times\boldsymbol{f}''(t)|}{|\boldsymbol{f}'(t)|^3}$$

表示.

(17) 在你的 CAS 上画出圆形螺旋线 $\boldsymbol{f}(t)=(a\cos(t),a\sin(t),ct),a>0$,并用前一问题的结果求它的曲率.

第二十三章　多元函数

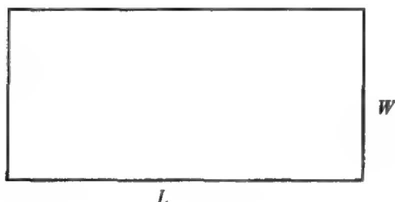
23.1　多元函数

当函数在实际中出现的时候，它们普遍地都包含了许多变量. 例如黄金价格依赖于种种因素，包括要买和要卖黄金的人数，正在开采的黄金总量，不可预测的政治事件等等. 对黄金价格的准确数学模型大概是不可能得到的. 但是，有许多实例表明，涉及多个变量的数学模型已经发展起来并成功地运行. 这种成就的实例包括商业飞机的飞行，它主要由计算机控制. 计算机输出飞行路线（即一条空间曲线），它是多个变元，如像气压，风速和风向，地球自转等等的函数. 完全清楚，研究多元函数并发展多维的微积分是至关重要的. 这就是本书剩余部分的任务.

定义　*一个 n* **元实函数**，*记为 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个规则，它对每个 n* **联组**实*数 $x_1,\cdots,x_n$ 指定一个唯一的实数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，其中 $x_1,\cdots,x_n$ 在某个 n 联组的区域中.*

注　在第一章中引进函数概念（连同定义域与值域的概念）时，其表述是足够一般的，它可转到目前的讨论中. 因此在上述定义中，区域即定义域指的是我们已熟知的东西.

例 23.1（矩形的面积）　或许最简单的二元函数的例子，是由矩形的长 L 和宽 W 决定此矩形面积的函数了.



它的面积 $A(L,W)$ 同时是 L 和 W 的函数,由

$$A(L,W) = L \cdot W$$

给出. 注意,函数 A 定义在所有使 L,W 非负的 2 - 联组 (L,W) 上.

例 23.2(加法平均函数) 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为任一 n - 联组数. 加法平均函数 $M(x_1,\cdots,x_n)$ 是个 n 元函数,定义为

$$M(x_1,\cdots,x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

例如,当 $n = 3$,则 2,5,8 的加法平均为

$$M(2,5,8) = \frac{1}{3}(2 + 5 + 8) = 5.$$

例 23.3(披萨饼函数) 一家披萨饼店供应一种 \$5.50 的奶酪西红柿的小披萨. 有四种不同的饼面铺料可提供,但每样均需付额外费用. 假设每份青椒需附加 40 分,洋葱 50 分,蘑菇 75 分而茄子 \$1.00. 假设 P,O,M 和 E 分别为一顾客点的附加辅料中青椒,洋葱,蘑菇和茄子的份数. 于是此披萨的价格 $C(P,O,M,E)$ 是四个变量 P,O,M,E 的函数,并由下式给出:

$$C(P,O,M,E) = 5.50 + (0.4)P + (0.5)O + (0.75)M + E.$$

例 23.4(距离函数) 设 (x,y,z) 为三维空间中一点. 于是从 (x,y,z) 到原点 $(0,0,0)$ 的距离由公式

$$D(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

给出. 此距离函数是个三个变元 x,y,z 的函数,定义在任何一个 3 - 联组上.

注 当我们把每个三元组 (x,y,z) 与三维空间中一个点等同时,这个距离函数便可看作空间中点的函数. 这个直接的联系在一般情形也成立,从而任何三元函数与向量理论联系在一起了. n 元函数相似地也可看作 n 维空间中点的函数. 注意我们不起眼的披萨饼函数(例 23.3) 事实上是四维空间上的函数!

§ 23.1 的习题

用你的 CAS 构造下列的多元实函数. 决定所给函数的定义域和值域. 用计算函数在那个点的值来检验一个变量的值是否在此定义域中. 如果此点不在此区域中就会出现一个错误信息或者一个虚数.

(1) $f(x,y) = x^2 + y - 2$.　　(2) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3$.

(3) $f(x,y) = \frac{x}{y}$.　　(4) $f(x,y) = \frac{3x^2 - 7y^3}{x^4 + y^4}$.

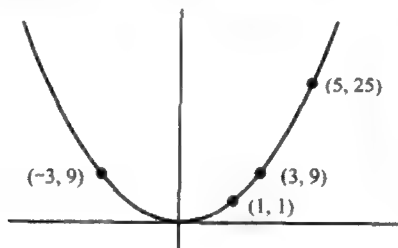
(5) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 11}$.　　(6) $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x}}{yz}$.

(7) $f(x,y,z) = \ln(9 - 3x^2 - y^2 - 3z^2)$.　　(8) $f(x,y,z,w) = \frac{\sqrt{xy}}{z^2 + w^2}$.

23.2　图形显示

回忆单变元函数 $f(x)$ 是用在二维空间中画点 $(x, f(x))$ 来做图形显示的. 由于我们只有**一个自由度**(x - 变量),其图形显示是条一维曲线. 当我们以通常方式标出二维空间的两条轴,即 x, y 时,我们可将此函数写为 $y = f(x)$ 的形式. 在图形显示中的点 $(x, f(x))$ 因此便是 (x, y).

例 23.5　设 $f(x) = x^2$. 于是 $(1,1)$, $(2,4)$, $(-3,9)$ 和 $(5,25)$ 是图像上点的例子,而一般的点具有 (x, x^2), $x \in \mathbb{R}$ 的形式.



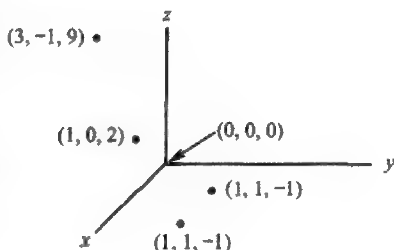
提问　我们如何得到两个变元 x, y 的函数 $f(x,y)$ 的图形显示?

回答　与上面讨论的自然类比是在三维空间中画出点 $(x, y, f(x,y))$ 来图形显示函数 $f(x,y)$. 按习惯方式标出三维空间的轴 x, y, z,我们便可以重写此函数为形式

$$z = f(x,y).$$

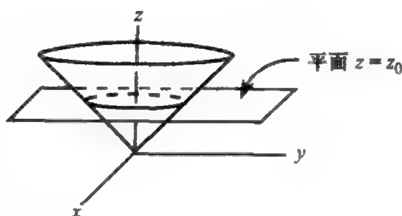
例 23.6 描述函数 $f(x,y) = 2x - 3y$ 的图形显示的特征.

如果我们画出一些形如 $(x,y,2x-3y)$ 的随意选取的点以期发现些什么，产生的图形会令人十分困惑（在右图中我们已画出了点 $(0,0,0)$，$(0,1,-3)$，$(1,0,2)$，$(1,1,-1)$，$(3,-1,9)$. 较好的一个方法是考查方程 $z = 2x - 3y$. 在 §21.2 中我们指出这实际上是一个平面的方程.



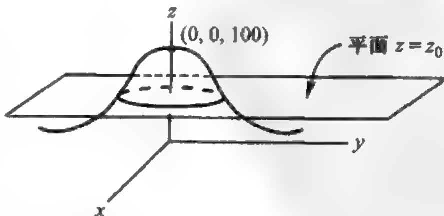
例 23.7 描述函数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ 的图形显示.

这个函数比我们前面的例子更复杂. 首先观察到，当我们写为 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 时，由于平方根不能为负，故 $z \geq 0$. 得到二元函数图像的一个基本方法是固定 z 的一个值，譬如 $z = 1$，然后画出我们图中的点 $(x,y,1)$. 现在在假定 $\sqrt{x^2+y^2} = 1$ 的条件下，点 $(x,y,1)$ 位于我们的图上，而它是（我们熟悉的）一个圆的方程. 更一般地，对任意固定的 $z = z_0 > 0$，满足 $\sqrt{x^2+y^2} = z_0$ 的点 (x,y,z_0) 必在平面 $z = z_0$ 中的一个半径为 z_0 的圆上. 让这些圆的集合一齐显现出来，便看出 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ 不过是顶点在 $(0,0,0)$ 的圆锥.



例 23.8 描述 $f(x,y) = 100 - 3x^2 - 2y^4$ 的图形显示.

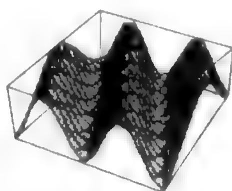
设 $z = 100 - 3x^2 - 2y^4$，可以清楚看出，由于 $3x^2 + 2y^4$ 总是正的，最高的 z 值（从而是图形在 z 轴上能达到的最高点）为 $z = 100$. 对每个固定的 $z = z_0$，考虑那些既在我们图形上又在 $z = z_0$ 平面上加点 (x,y,z_0). 汇集这些曲线我们便得到一个曲面的图形显示，其形状是一座山的表面.



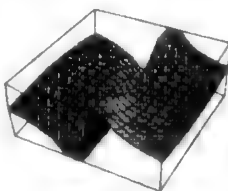
注 在这个例题中，称曲线 $100 - 3x^2 - 2y^4 = z_0$ 为**等高线**. 它出现于水平高度 z_0，并位于平面 $z = z_0$ 中. 这引出了下面的一般定义.

定义　设 $z = f(x,y)$ 为一个二元函数. 对每个固定数 $z = z_0$，方程 $f(x,y) = z_0$ 是平面 $z = z_0$ 中的一条曲线. 称此曲线为 f 在平面 $z = z_0$ 中的**等高线**.

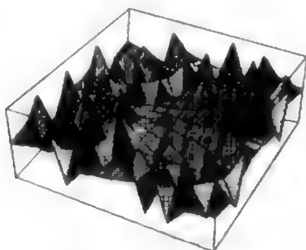
当我们考查任意二元函数 $z = f(x,y)$ 时，其图形是个在三维空间中扭曲翻转的二维曲面. 下面画出了一些例子.



$z = \cos(x+y)$

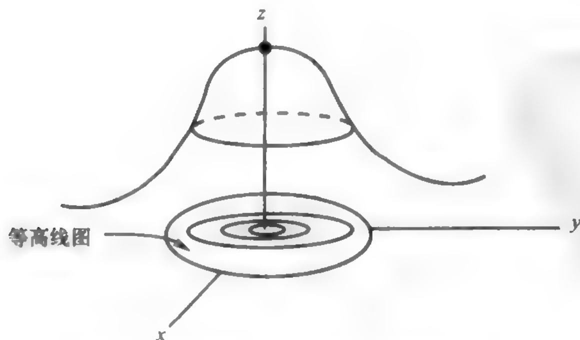


$z = 1-x^2+y^2$



$z = \tan(xy)$

如果所有的等高线 $f(x,y) = z_0$ 都被投射到(画到) xy - 平面上，则得到这个曲面的**等高线图**.



当考虑多于两个变量的函数时，不可能在三维空间中得到图形显示. 但是，

我们可以抽象地考虑4条相互垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{l}$,它们构成了四维空间.四维空间中的一点是一个实数的4-联组(x,y,z,w),而向量具有 $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}+d\boldsymbol{l}$ 的形式.尽管我们不能使四维空间形象化,但骗骗你的眼睛却是办得到的.恰似一个三维图像可以画在一张纸(它是二维的)上,并且还显现出长、宽、高(用透视法)一样,一个四维图像也可以以全息近似地表现在三维空间中.

函数

$$w=f(x,y,z)$$

的图形显示,按定义是四维空间中所有具有形式(x,y,z,w),其中 $w=f(x,y,z)$ 的所有点的集合.如果我们固定 $w=w_0$,可以观察**等高面** $f(x,y,z)=w_0$,它与三维空间中对曲面所考虑的等高线是类比的.

例 23.9(四维球面) 考虑三元函数

$$w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

在 $w=w_0$ 的等高曲面为球面

$$w_0=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

这是四维球面在水平 w_0 的三维空间中的反映.

§23.2 的习题

用你的CAS画出下列曲面.确定曲面有奇点的地方(即它射向 $\pm\infty$).为了看出此曲面的一个特定部分,你不得不选择一个合适的作图范围.

(1) $z=5x-3y$.　(2) $z=x^2+y^2$.　(3) $z=\dfrac{1}{3x^2+2y^2}$.

(4) $z=\cos(x)\cdot\cos(y)$.　(5) $z=\dfrac{20-x^2-y^2}{(x-5)}$.　(6) $z=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$.

对下列曲面作一个等高线图.用你的CAS指出每种情形中的几条等高线.使用你的CAS曲面作图功能画出等高线图.

(7) $z=5x^2+3y^2$.　(8) $z=5x^2-3y^2$.　(9) $z=1-xy$.

(10) $z=2y-\cos(x)$.　(11) $z=(x-2)^2-(y-4)^2$.　(12) $z=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}$.

23.3 偏导数和梯度

设 $f(x,y)$ 是对所有实数对 x,y 都有定义的实函数.

问题 如何定义这样一种函数的导数?

对此问题的一个自然的处理办法是试图定义导数为一个二重极限:即

$$f'(x,y) = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)}{hk}.$$

可惜这行不通. 这个办法的难点甚至在计算简单的函数的二重极限时都能看到. 例如,当 $f(x,y) = xy$(这是一个我们预料能够微分的函数)时,这个二重极限为

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)}{hk}\\ &=\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{(x+h)(y+k)-xy}{hk}\\ &=\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{hy+kx+hk}{hk}\\ &=\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{y}{k}+\frac{x}{h}+1.\end{aligned}$$

显然此极限不存在. 尽管有此困难,我们还是可以定义 $f(x,y)$ 关于每个变量 x 和 y 的**偏导数**如下:

定义　固定变量 y. 定义 $f(x,y)$ **关于 x 的偏导数**为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

但假定此极限存在. 记此偏导数为 $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\text{也记为}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$.

定义　固定变量 x. 定义 $f(x,y)$ **关于 y 的偏导数**为 $\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$,但假定此极限存在. 记此偏导数为 $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\text{也记为}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$.

例 23.10　计算 $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y)$.

在此例题中 $f(x,y) = x^2y$,我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+y)^2y-x^2y}{h}\\ &= y\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= y\cdot 2x.\end{aligned}$$

无需求助于极限就容易算出偏导数. 要计算

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

只要将变量 y 当作常数,然后作关于 x 的微分即可.

例 23.11 计算$\frac{\partial}{\partial x}(x^4+2x^3y^2+x^2y-y^4)$.

将 y 当作常数处理时,我们有

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^4+2x^3y^2+x^2y-y^4)=4x^3+6x^2y^2+2xy.$$

例 23.12 计算$\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2+\cos(xy^2)+3x-4)$.

我们有

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2+\cos(xy^2)+3x-4)=2x^3y-2xy\sin(xy^2).$$

警示 偏导数的表现的确不同于单变量函数的导数. 例如,

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x-4)=0,$$

尽管 $3x-4$ 并非常数函数. 事实上,如果 $f(x,y)$ 是任何一个仅仅涉及 x 的函数(例如 $f(x,y)=x^4+3x+1$),则

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=0$$

这是因为对所有的 x 有 $f(x,y+h)=f(x,y)$.

已知一个 n 元实函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,我们可以定义第 j 个**偏导数**为

$$\frac{\partial}{\partial x_j}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_j+h,\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_j,\cdots,x_n)}{h}.$$

例 23.13 计算

$$\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y^4z^3+2xy^2+xz).$$

将 x,y 看作常数,我们有

$$\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y^4z^3+3xy^2+xz)=9x^2y^4z^2+x.$$

二阶偏导数 当关于 x 或 y 取函数 $f(x,y)$ 的偏导数时,我们得到了另一个二元函数. 于是我们可以对这些新函数取偏导数. 这个步骤将产生**四个二阶偏导数**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

例 23.14 设$f(x,y) = x^2 + x^3y^2 + y^3$. 计算所有四个偏导数. 一阶偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3x^2y^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 3y^2,$$

因此,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 6xy^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 + 6y,$$

以及

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y.$$

注 在前面例题中我们看到的现象

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

不是偶然的. 仔细查验二阶偏导数的极限定义,我们可以在一般情形下验证此等式.

梯度向量 设$f(x,y)$为一个二元函数,它定义于区域$a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$,其中$a < b, c < d$为固定的数. 假定在此区域偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$存在.

定义 *f的梯度是记为∇f的向量*

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

相似地,给出三元函数$f(x,y,z)$,我们定义:

定义 *f的梯度是记为∇f的向量*

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

例 23.15 设$f(x,y) = x^3y^2, g(x,y,z) = \cos(xy^2z^3) + y^4$. 计算$\nabla f$和$\nabla g$.

按定义我们有

$$\nabla f = 3x^2y^2\boldsymbol{i} + 2x^3y\boldsymbol{j},$$

以及

$$\nabla g = -y^2z^3\sin(xy^2z^3)\boldsymbol{i} - (2xyz^3\sin(xy^2z^3) + 4y^3)\boldsymbol{j} - 3xy^2z^2\sin(xy^2z^3)\boldsymbol{k}.$$

刚刚定义的梯度向量,在我们试图单独处理二元函数导数概念的本章其余部分中将起着主要作用.

§23.3 的习题

对下列函数 f 计算偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$. 用你的 CAS 确认你的答案.

(1) x^4y^2+7. (2) $x^4y^2+3x^5$. (3) $\ln(xy^2z)$.

(4) $\cos(2y^3z)-x^2$. (5) $e^{x^2z}+3y^2z^4$. (6) $\tan(xyz)$.

(7) x^{yz}. (8) $xy+zx+y^3$. (9) $\cosh(x-5x+z)$.

对下列函数 f 计算 ∇f 和 $\nabla f(1,2,3)$. 用你的 CAS 确认你的答案.

(10) xy^2. (11) $x^2y^2z^4$. (12) $\cos(xz^3)+y^3$.

(13) e^{x^2z}. (14) $\tan(y^3z^3)+x^2$. (15) $\ln(x^2+y^2)$.

对下列函数 f 求它的全部三个偏导数. 用你的 CAS 确认你的答案.

(16) xy. (17) x^3y^2. (18) $\sqrt{x^2+y^2}$.

(19) $\ln(x+y)$. (20) x^y. (21) $\cos(x^2+y^2)$.

23.4 全导数

在前一节中定义的函数 $f(x,y)$ 的偏导数是由保持两个变量中一个不变而得到的,它等于是看作一个单变量函数. 微分理论能否真正推广到二维的问题,直到美国数学家威廉 · H · 杨在 1909 年引进**全导数**的概念之前都没有答案.

在 §23.3 中我们力图定义 $f(x,y)$ 的导数为一个二重极限,但并不成功. 正如最终表明的那样,甚至连最规矩的函数(当用二重极限计算时)也是不可微分的,这使我们认识到所建议的定义是不好的. 然而直观上看,二重极限在这方面似乎确定是合适的,于是一点聪明的修改将使它行得通.

为了以一种合适的视角去看待二维时的微分,我们必须首先回头看一下一维的情形. 设 $f(x)$ 为单变函数. f 的导数被定义为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

注意,此极限的存在性等价于下面的陈述,即当 h 非常小时,

$$f(x+h)\approx f(x)+hf'(x). \tag{23.1}$$

由定义,(23.1) 的近似符号表明

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\varepsilon(h),$$

其中 $\varepsilon(h)$ 是个函数,使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{h}=0.$$

例如,考虑$f(x)=x^2$. 于是$f(x+h)=x^2+2xh+h^2$. $f'(x)=2x$,以及

$$(x+h)^2\approx x^2+h\cdot 2x.$$

这个近似式可以用精确的等式代替:

$$(x+h)^2=x^2+h\cdot 2x+\varepsilon(h),$$

其中$\varepsilon(h)=h^2$. 引人注意之处在于,这个初级的例子里藏着开启正确阐明全导数概念的钥匙.

定义 设$f(x,y)$为定义于区域$a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$上的实函数. 我们说$f$在$(x_0,y_0)$**可微分**是指如果$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$和$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$都存在,并且存在一个函数$\varepsilon(h,k)$使得

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k+\varepsilon(h,k), \tag{23.2}$$

其中

$$\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

注 注意出现在定义中的偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$. 这是预期中让我们固定其中一个变量所取的偏导数.

如果设$H=(h,k)$和$\boldsymbol{H}=(h,k)=h\boldsymbol{i}+k\boldsymbol{j}$,则我们重写(23.2)为一个紧凑的形式

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=\nabla f\cdot\boldsymbol{H}+\varepsilon(H).$$

定义 设f为实可微函数. 记为$\boldsymbol{f}'(x,y)$的**全导数**是一个偏导数的向量

$$\boldsymbol{f}'(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

注 这个全导数的定义从自然的发展眼光来看是最好的. 对一元函数$f(x)$,我们有

$$f(x+h)-f(x)\approx f'(x)\cdot h.$$

对二元函数$f(x,y)$,类比的近似是

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)\approx\boldsymbol{f}'(x,y)\cdot(h,k).$$

三元函数也可以依类似的方式处理. 给出一个三元函数$f(x,y,z)$,定义全导数

就是梯度向量,

$$f'(x,y,z) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

而类比的近似为

$$f(x+h,y+k,z+l) - f(x,y,z) \approx f'(x,y,z)\cdot(h,k,l).$$

例 23.16 计算$f(x,y,z) = x^2y^3z + 2x$ 的全导数.

这时我们有

$$f'(x,y,z) = \nabla f = (2xy^3z + 2)\boldsymbol{i} + 3x^2y^2z\boldsymbol{j} + x^2y^3\boldsymbol{k}.$$

警示 全导数是个向量而非纯量.

方向导数 定义方向导数的动机在于这样的事实:因为全导数是个向量,所以它应该能够度量我们的函数在任意(单位)向量的方向上的变化率. 正是全导数在此单位向量上的投影捕捉住了这个直观想法.

定义 设f为可微的实函数,$\boldsymbol{u}$为一单位向量. f在$\boldsymbol{u}$方向上的**方向导数**被记作$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}$,它被定义为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}} = \nabla f\cdot \boldsymbol{u}.$$

例 23.17 设$f(x,y,z) = x^2y^3z^4$. 求$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}$,其中$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$. f的全导数为

$$f'(x,y,z) = \nabla f = 2xy^3z^4\boldsymbol{i} + 3x^2y^2z^4\boldsymbol{j} + 4x^2y^3z^3\boldsymbol{k},$$

因而所想要的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}} = \nabla f\cdot \boldsymbol{u} = \nabla f\cdot\frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(2xy^3z^4 + 3x^2y^2z^4 + 4x^2y^3z^3).$$

还有另一个可行的方向导数的形式,这是在应用中产生的(因此常常出现),为完整性我们提一下它. 设$\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,u_3)$为一单位向量. 可以证明

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+hu_1,y+hu_2,z+hu_3) - f(x,y,z)}{h}.$$

§23.4 的习题

计算下列函数f的全导数及在所给方向$\boldsymbol{u}$的方向导数.

(1) $f(x,y) = x^2 + 3y^2, u = \frac{3}{5}i + \frac{5}{4}j$.

(2) $f(x,y) = x^2y^4 + 3y, u = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$.

(3) $f(x,y) = x^2yz^4 + 2\sin(xy), u = \frac{3i - 2j + k}{\sqrt{14}}$.

(4) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 - xz, u = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

(5) $f(x,y) = z^4e^{3x2y}, u = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

(6) $f(x,y) = x^{yz}, u = \frac{i - 2j + 3k}{\sqrt{14}}$.

(7) 计算$f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^3, u = \frac{i - j}{\sqrt{2}}$的$\frac{\partial f}{\partial u}(1, -1, 2)$.

(8) 计算$f(x,y,z) = x^2y^3z, u = k$的$\frac{\partial f}{\partial u}(-1, 2, 1)$.

23.5　链规则

我们遇到过的关于微分的最杰出的成果之一是链规则(见 §7.4). 链规则规定了两个实函数$f(x)$和$g(x)$复合后的导数由规则

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

给出. 当我们转移到两个变量的函数$f(x,y), u(x,y), v(x,y)$时,情况变得比较复杂. 产生了两个问题:(1) 我们如何计算

$$\frac{\partial}{\partial x}f(u(x,y), v(x,y)), \frac{\partial}{\partial y}f(u(x,y), v(x,y)),$$

(2) 给出两个单变元t的函数$g(t), h(t)$,我们如何计算$f(g(t), h(t))$的导数.

为了获得这些问题(以及我们如何回答)的一些直觉感,让我们看一些例子.

例 23.18　设$f(x,y) = x^2y^3, g(t) = \sqrt{t}, h(t) = t^2$. 计算$\frac{d}{dt}f(g(t), h(t))$.

这时的复合为

$$f(g(t), h(t)) = g(t)^2h(t)^3 = (\sqrt{t})^2 \cdot (t^2)^3 = t^7$$

因此$\frac{d}{dt}f(g(t), h(t)) = 7t^6$.

现在叙述对形如$f(g(t),h(t))$函数的链规则，它让我们不慌不忙地进行例23.18的计算.

命题 23.19 设$f(x,y)$为实的二元可微函数，两个变量为x,y；$g(t),h(t)$是另一变量t的可微函数. 假设$f(g(t),h(t))$本身可微，则我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(g(t),h(t)) = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}. \tag{23.3}$$

例 23.20 用命题23.19重新计算例23.18中的导数.

由于$f(g,h) = g^2h^3$，偏导数分别为

$$\frac{\partial f}{\partial g} = 2gh^3, \frac{\partial f}{\partial h} = 39^2h^2.$$

另外，由于$g(t) = \sqrt{t}, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}, h(t) = t^2, \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 2t$. 将这些导数代入链规则，得到了

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(g(t),h(t)) &= \overbrace{2gh^3}^{\frac{\partial f}{\partial g}} \cdot \overbrace{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}^{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}} + \overbrace{3g^2h^2}^{\frac{\partial f}{\partial h}} \cdot \overbrace{2t}^{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}} \\ &= 2\sqrt{t} \cdot t^6 \cdot \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} + 3(\sqrt{t})^2t^4 \cdot 2t \\ &= 7t^6.\end{aligned}$$

考虑过了形如$f(g(t),h(t))$的函数，我们现在叙述一个对二元函数更一般的链规则.

命题 23.21 设$f(x,y)$为可微的二元实函数；$u(s,t)$和$v(s,t)$为另外两个变元s,t的可微实函数. 假定$f(u(s,t),v(s,t))$可微，我们则有

$$\frac{\partial}{\partial s}f(u(s,t),v(s,t)) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f(u(s,t),v(s,t)) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

例 23.22 设$f(x,y) = x^2y^3, u(s,t) = s^2 + t^2, v(s,t) = st$. 计算$\frac{\partial}{\partial s}f(u,v)$.

命题23.21允许我们容易地计算出这个偏导数如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}f(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} \\ &= 2uv^3 \cdot 2s + 3u^2v^2 \cdot t \\ &= 2(s^2 + t^2)(st)^3, 2s + 3(s^2 + t^2)^2(st)^2 \cdot t.\end{aligned}$$

当考虑三个或更多变元的函数复合时有更多种的可能情形. 与其考虑三元函数(或任何其他特定的变量数),我们不如叙述那个最一般的结果.

命题23.23(一般链规则) 设$f(x_1,\cdots,x_n)$为n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的可微实函数,并设$u_1(t_1,\cdots,t_m),u_2(t_1,\cdots,t_m),\cdots,u_n(t_1,\cdots,t_m)$,为$m$个变量$t_1,\cdots,t_m$的实函数. 假定$f(u_1,\cdots,u_n)$可微,我们则有

$$\frac{\partial}{\partial t_i}f(u_1,\cdots,u_n)=\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t_i}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t_i}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial t_i},$$

其中$i=1,2,\cdots,m$.

例23.24 计算$f(u,v,w)$的偏导数,其中$u=u(s,t),v=v(s,t),w=w(s,t)$.

一般链规则产生了下面的公式:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

例23.25 设$f(x,y,z)=xy^2+z^3,u(s,t)=s^2+t^2,v(s,t)=t^3,w(s,t)=s^2t$. 计算

$$\frac{\partial}{\partial t}f(u,v,w).$$

因为$f(u,v,w)=uv^2+w^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial u}=v^2,\frac{\partial f}{\partial v}=2uv,\frac{\partial f}{\partial w}=3w^2.$$

应用链规则,我们得到想要的导数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}\\&=v^2\cdot 2t+2uv\cdot 3t^2+3w^2\cdot s^2\\&=2t^7+6(s^2+t^2)t^5+3s^6t^2.\end{aligned}$$

§23.5 的习题

利用一般链规则计算$\frac{\partial f}{\partial t}$或者$\frac{\partial g}{\partial s}$,其中$f,g$由下面给出. 用你的CAS来复合所要的函数并直接微分它们以确认你的答案.

(1)$f(x,y)=2x^2-3y^2,x=t^4,y=t^2$.

(2) $f(x,y) = (x - y^2)^{10}, x = \cos(t), y = t^3$.

(3) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^4), x = 3t^2, y = t^5, z = \sqrt{t}$.

(4) $f(x,y,z) = e^{xyz}, x = \ln(t), y = t^2, z = t^3$.

(5) $f(x,y,z,w) = \cos(x + y + z + w^2), x = t^2, y = t, z = \ln(t), w = t^3$.

(6) $g(x,y) = 2x^2 + y^2, x = s^2 + t^2, y = s^2 - t^2$.

(7) $g(x,y) = (x + y^3)^5, x = st, y = \frac{s}{t}$.

(8) $g(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^4, x = s + t, y = s - t, z = t^3$.

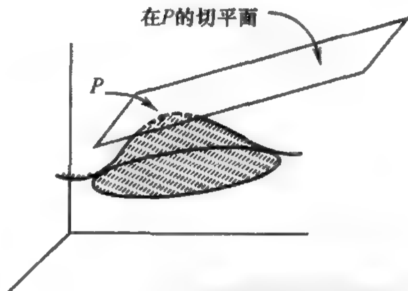
(9) $g(x,y,z) = \cos(xyz), x = s + t + u, y = s^2u^3, z = u^4$.

(10) $g(x,y,z,w) = \ln(x + y + z + w), x = stu, y = \frac{s - t}{u}, z = s^3$.

23.6 切平面

在我们定义一元函数的导数时,曾非常仔细地考虑过此曲线在一点 P 的切线.我们以发展出对二元可微函数的类比理论来结束本章.由于函数 $z = f(x,y)$ 的图像是三维空间中的一个二维曲面,在曲面上的每点 P 则有一个切平面.

问题 已知可微函数 $z = f(x,y)$ 和曲面上点 $P = (x_0, y_0, z_0)$,我们如何确定在 P 的切平面方程?



正如在 §21.2 中指出的,倘若我们能够找到一个在点 P 垂直于此曲面的向量 $\boldsymbol{n}$,我们就能算出在 P 点的切平面方程.一旦向量 $\boldsymbol{n}$ 有了,切平面方程直接就是

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0,$$

这是因为只要 (x,y,z) 在此平面上,向量 $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ 总是垂直于 $\boldsymbol{n}$.

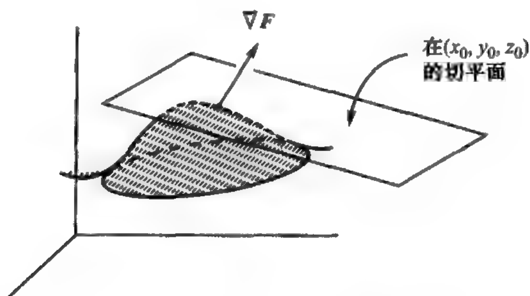
求法向量的方法 再次从定义我们曲面的可微函数 $z = f(x,y)$ 开始,考虑三元函数

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0.$$

于是 F 是 x,y,z 的函数,而 F 的全导数是

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

断言 向量 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 是曲面 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的法向量.

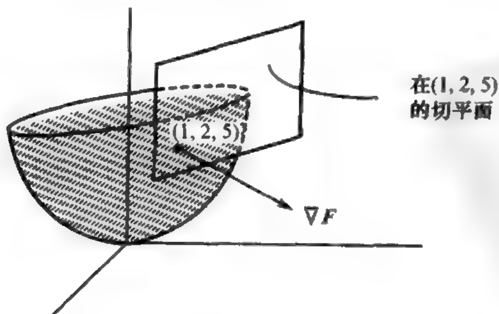


证明　设$\boldsymbol{g}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$为位于曲面$F(x,y,z) = 0$上的任一条空间曲线，并通过点$(x_0, y_0, z_0)$. 由于通过了此点，故而存在$t_0$使$\boldsymbol{g}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$. 现在知道对所有$t$有$F(x(t), y(t), z(t)) = 0$，另外，链规则告诉我们

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x(t), y(t), z(t)) = \nabla F \cdot (x'(t)\boldsymbol{i} + y'(t)\boldsymbol{j} + z'(t)\boldsymbol{k})$$
$$= \nabla F \cdot \boldsymbol{g}'(t) = 0.$$

特别，在$t = t_0$有$\nabla F \cdot \boldsymbol{g}'(t_0) = 0$. 由于$\boldsymbol{g}'(t_0)$是此曲线在$(x_0, y_0, z_0)$的切向量，故而我们证明了$\nabla F(x_0, y_0, z_0)$垂直于此切向量. 回想$\boldsymbol{g}(t)$是曲面上任何一条通过$(x_0, y_0, z_0)$的空间曲线，我们明白了$\nabla F(x_0, y_0, z_0)$垂直于曲面上过$(x_0, y_0, z_0)$的每条空间曲线在此点的切向量，因而$\nabla F(x_0, y_0, z_0)$必定在$(x_0, y_0, z_0)$垂直于曲面.

例 23.26　求曲面$z = x^2 + y^2$在点$(1,2,5)$的切平面方程.



定义$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$，我们有$\nabla F = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$，而向量

$$\nabla F(1,2,5) = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

为在(1,2,5) 的法线. 切平面的方程便由点积

$$(x-1, y-2, z-5)\cdot(2,4,-1)=0$$

得到,或者等价地,

$$2x+4y-z=5.$$

刚才讲述的用梯度向量求曲面切平面的方法实际上在任意维数时均有效. 为了解释这点,回到二维的一条曲线和它的切线的简单例子.

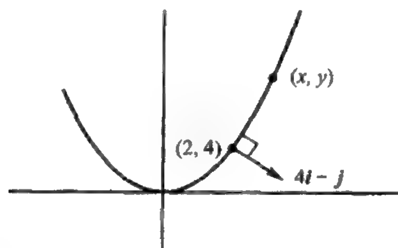
例 23.27 求曲线 $y=x^2$ 在点 $x=2$ 的切线.

设 $F(x,y)=x^2-y=0$ 为此曲线方程.

$$\nabla F(x,y)=2x\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},$$

此向量垂直于曲线. 现在 $\nabla F(2,4)=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$,而且如果$(x,y)$为此切线上的一般点,则

$$(x-2, y-4)\cdot(4,-1)=0$$



因此这条切线的方程是

$$4x-y=4.$$

§ 23.6 的习题

在下列习题中求所给曲面在所给点的切平面方程.

(1) $z=3x^2+2y^2$, $(1,2,11)$.

(2) $z=3x^2-2y^2$, $(1,2,-5)$.

(3) $z=\cos(xy)$, $\left(\pi,\frac{1}{2},0\right)$.

(4) $z=x^2y$, $(-2,3,12)$.

(5) $z=x^y$, $(2,3,8)$.

(6) $z=e^{-x^2-y^2}$, $(10,10,e^{-200})$.

(7) $z=\dfrac{1}{x^2+3y^2}$, $\left(2,1,\frac{1}{7}\right)$.

(8) $z=\sqrt{x-2y}$, $(12,4,2)$.

(9) 用你的 CAS 作曲线 $y=e^{-x^2}$ 的图. 用梯度作此曲线在 $x=1$ 的法线. 用你的 CAS 画出这个梯度向量(在$(1,e^{-1})$). 求在 $x=1$ 的切线方程.

(10) 使用梯度法求曲线 $y = x\ln(x)$ 在点 $x = e$ 的切线方程.

第二十三章的附加习题

(1) 在你的 CAS 上描绘函数 $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的图像.

(2) 在你的 CAS 上描绘函数 $f(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的图像.

(3) 对习题(1),(2),用你的 CAS 画出曲面的等高线.

(4) 用你的 CAS,描画出二维曲面 $f(x,y) = \exp(x + y)$. 求通过下列点的等高线:
(a)$(\ln(3),\ln(3))$,(b)$(0,0)$,(c)$(\ln(2),0)$.

(5) 在你的 CAS 上绘制函数 $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{1 - xy}$ 的图像. 求 f 的定义域. f 是否处处连续?是否可微?

(6) 设对 $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$, 而 $f(0,0) = 0$. 求 $f(x,y)$ 在沿着下面各条曲线 $(x,y) \to (0,0)$ 时的极限:(a)x 轴,(b)y 轴,(c) 抛物线 $y = x^2$,(d) 直线 $y = x$. 你对 f 在 $(0,0)$ 的连续性有何结论?

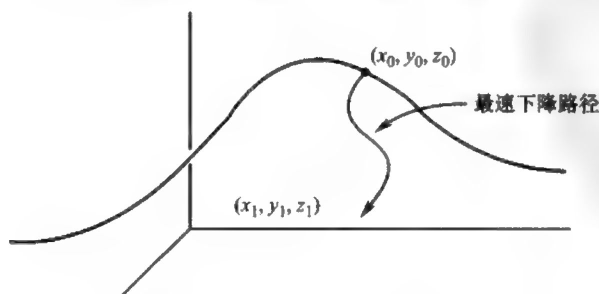
(7) 求所给曲面在所给点上的切平面方程. 用你的 CAS 作此曲面和这些切平面的图形.
(a)$z = x^2 + 3y^2 - x + 3y - 2$, $(1,3,34)$.
(b)$z = e^{-(x^2+y^2-2x)}$, $(1,0,e)$.
(c)$z = xy^2 - yx^2 - 2xy$, $(1,-1,4)$.

第二十四章　多维最优化

24.1　最速下降法

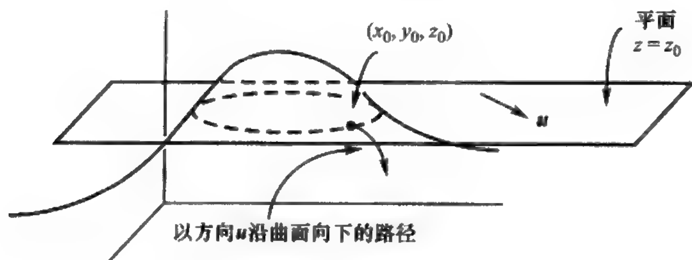
研究最速下降法的物理动机在于下面类型的观察. 在一场大雨之后,蜿蜒向山下流淌的雨水(已形成溪流)会自然地选择最陡峭的路径下降. 另一个例子是涉及滑雪路线的这个性质. 滑雪路线因难度而各不相同,但最具挑战性的是具有最速(最陡峭)下降的.

问题　已知曲面 $z = f(x,y)$ 和曲面上的点(x_0, y_0, z_0),我们如何找到曲面上下方的点(x_1, y_1, z_1)的最速下降路径?(这里的下方指的是 $z_1 < z_0$.)



这并不是一个全新的问题. 我们在第九章中遇到过相类比的问题,在那里

曲线 $y = f(x)$ 在一点 (x_0, y_0) 的陡峭程度是由曲线的斜率即导数 $f'(x_0)$ 来度量的，$f'(x_0)$ 越大，曲线在这一点就越陡峭.



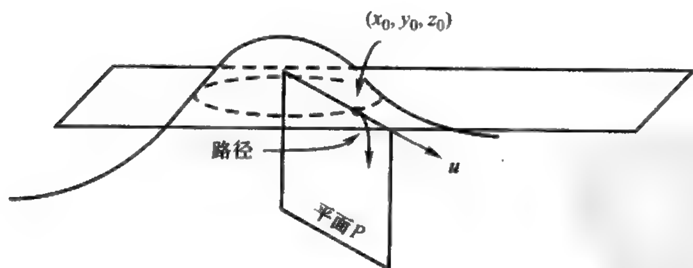
要开始我们对两个度量情形的分析，想像我们正在曲面上的点 (x_0, y_0, z_0) 上. 为了沿曲面向下运动我们必须选择一个方向，用数学术语说就是在平面 $z = z_0$ 上选择一个单位向量 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$，并以 $\boldsymbol{u}$ 为导向(可以用一只罗盘)沿曲面向下行进.

为了描述我们已选取了的路径(及其斜率)，设 P 为满足下面条件的平面：

(1) 包含了平行于 $\boldsymbol{u}$ 且通过 (x_0, y_0, z_0) 的直线，

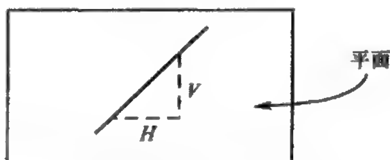
(2) 垂直于平面 $z = z_0$.

于是此曲面与平面 P 的交线恰恰是我们以方向 $\boldsymbol{u}$ 沿曲面向下所采取的路径.



问题　此路径在点 (x_0, y_0, z_0) 的斜率(即在 (x_0, y_0, z_0) 的切线斜率)是什么?

一般来说，在已知平面中一条直线的斜率是其竖直距离与水平距离之比(在 §3.1 的笛卡儿平面上我们已见到过). 注意到，斜率越大则此直线的倾斜越陡峭.



我们的路径在点(x_0,y_0,z_0)的切线简单地是曲面在(x_0,y_0,z_0)的切平面与平面P的交线. 因此这条路径的斜率由方向导数给出：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+u_1h,y+u_2h)-f(x,y)}{h} \tag{24.1}$$
$$=\nabla F\cdot \boldsymbol{u}.$$

由于$\boldsymbol{u}$是单位向量(它表明$|\boldsymbol{u}|=1$)，我们可以利用定理(20.8)的点积公式计算方向导数(24.1)：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}=|\nabla f|\cdot|\boldsymbol{u}|\cos(\theta)$$
$$=|\nabla f|\cos(\theta),$$

其中θ是梯度向量与$\boldsymbol{u}$之间的角. 由于$-1\leqslant\cos\theta\leqslant 1$，我们看出当$\cos(\theta)=1$时极大而当$\cos(\theta)=-1$为极小. 因此当向量$\nabla f$和$\boldsymbol{u}$指向同一方向时$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}$取极大，而当它们指向相反方向时极小. 我们把结论陈述于下面的命题中.

命题 24.1 *设$z=f(x,y)$为可微函数. 梯度向量∇f的方向是函数f极大增大的方向.*

例 24.2 假设$z=8\,000-2x^2-5y^2$在区域$-50\leqslant x\leqslant 50$，$-25\leqslant y\leqslant 25$产生了一个山形曲面. 一个滑雪者在点(5,10,7450)的位置. 他应该以什么方向冲下能最速下降下山？

设$f(x,y)=8\,000-2x^2-5y^2$，则$\nabla f=4x\boldsymbol{i}-10y\boldsymbol{j}$，从而

$$\nabla f(5,10)=-20\boldsymbol{i}-100\boldsymbol{j}.$$

这是f的最大增大方向. 最大速降出现在相反的方向.

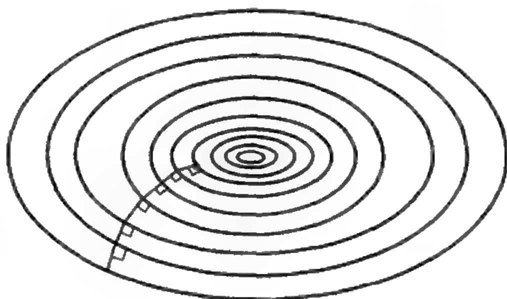
例 24.3 一个旅行者在例 24.2 所描述的山的靠近山底的地方，坐标为(50,20,1000). 他应该按什么方向开始登山具有最速上升？

这里的$\nabla f(50,20)=-200\boldsymbol{i}-200\boldsymbol{j}$为最速上升方向.

例 24.4 仍然参照例 24.2 的山. 设在山坡上一根水管爆裂，水喷涌而出. 破裂出现在坐标(10，-20,5800)处. 画一张此山的等高线图并清楚标明点(10，-20,5800). 如果没有障碍，水将沿最速降路径流下山. 描画出在等高线

图上的最速降路径的近似图.

我们先画出在 $z_0 = 0, 1\,000, 2\,000, 3\,000, 4\,000, 5\,000, 5\,800, 6\,500, 7\,000, 7\,500$ 的等高线 $z_0 = 8\,000 - 2x^2 - 5y^2$. 标出点$(10, -20, 5\,800)$.



对每个上面的 z_0 值令 $F(x,y) = f(x,y) - z_0 = 0$,对 $\nabla F = \nabla f$,而且如前面证明过的(见 §23.6) ∇F 垂直于该等高线. 由于最速降路径总是沿 ∇f 的方向,由此我们可以用两条等高线之间的短垂线画在等高线图上,给出此近似路径.

§24.1 的习题

(1) 设 $z = 10\,000 - 3x^2 - y^4$ 表示一座山的表面. 此山的最高点是什么?一旅行者在坐标$(10, 5, 9\,075)$处. 为了能最速下降,他应该按什么方向开始下山?

(2) 用你的 CAS 对曲面 $z = 10\,000 - 3x^2 - y^4$ 画多条等高线,并清楚地标出旅行者所在的坐标$(10, 5, 9\,075)$. 用手描画出最速降路径.

(3) 设 $z = 5x^2 + xy + y^3$. 求使 f 在点$(1, -2)$有最快增大的方向.

(4) 假定你位于一个区域中坐标为 $x = 1.5, y = 2$ 的点,而区域的高度由函数 $a(x,y) = \tan(2\pi x + \frac{\pi}{3}y)$ 给出. 欲使升高增长最大,你应该按什么方向(在 Oxy 平面中)行进?按什么方向行进你停留在同一高度?**提示:**a 的方向导数为 O 的方向垂直于 ∇a.

(5) 在某区域内以声波实验测定一个巨大的地下洞穴. 洞穴的深度按英尺由函数 $d(x,y) = 150 - 0.01x^2 - 0.006y^2$ 给出. 一位科学家在坐标$(10,20)$处有一台声纳测试装置,用来测量此洞穴的深度.

(a) 在坐标$(10,20)$处,他观察到什么深度的读数?

(b) 他应该按什么方向走去观察深度的最快增长?

(c) 描绘表示洞穴深度的等高线图.

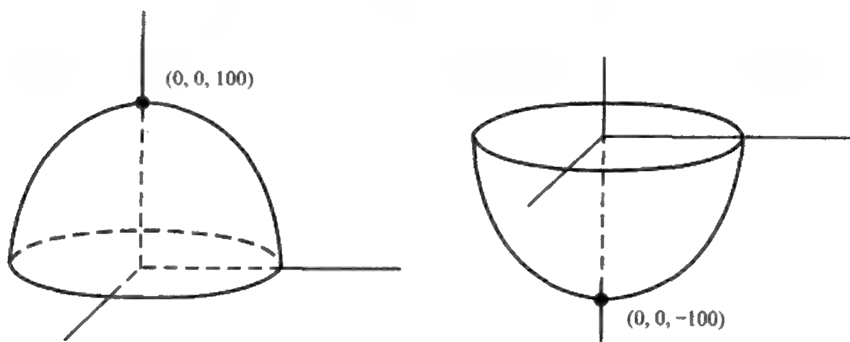
(6) 方程 $z = f(x,y)$ 和 $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$ 实际上是一样的. 它们的图像是同一曲面. 解释为什么 ∇f 和 ∇F 不是同一向量. ∇F 与此曲面上的最速下降有任何关系吗?

24.2 判别点法

一元函数导数的一个重要应用是求此函数极大和极小值的能力. 当我们转向二元可微函数 $z = f(x,y)$ 时,其图像会展示出各式各样的极性,如像山的顶峰,谷底及鞍点. 我们用例题来解释这三种可能性.

例 24.5(山顶) 设 $z = 100 - x^2 - y^2$,则点 $(0,0,100)$ 是此山的顶峰.

例 24.6(谷底) 设 $z = x^2 + y^2 - 100$,则点 $(0,0,-100)$ 是谷底.



定义 固定一个矩形区域 $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$,且设 (x_0, y_0) 为此区域中一个点. 称函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 有个**极大值**是说,对此区域中每个 (x,y) 有

$$f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0).$$

注 逆转不等式我们便能定义**极小值**.

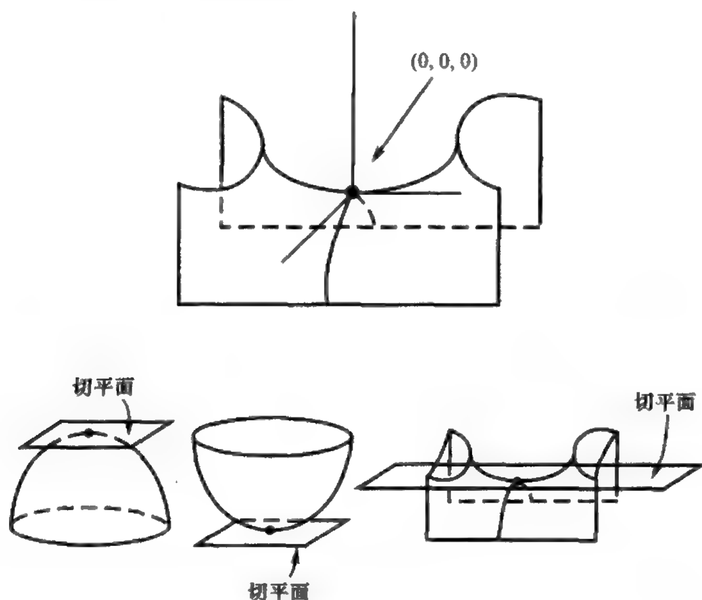
常常会发现一个函数在矩形 $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$ 上的极大或极小值出现在此矩形的边界上. 例如 $f(x,y) = x^2 + y^2$ 在正方形 $1 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2$ 上,在 $(2,2)$ 取得它的极大值,取 $f(2,2) = 8$. 显然对此正方形中每个点有 $f(x,y) \leqslant 8$.

在例24.5中点 $(0,0,100)$ 在包含了点 $(0,0,100)$ 的任何矩形区域中都是极大点,而例24.6中,在包含点 $(0,0,-100)$ 的任意矩形中 $(0,0,-100)$ 都是极小. 然而下一个例题解释了第三种可能性.

例 24.7(鞍点) 设 $z = y^2 - x^2$. 此函数的图像被展示于下. 点 $(0,0,0)$ 被称做**鞍点**. 注意它既非极大也非极小.

这三个例子有一个共有的特征,即在极大,极小或鞍点的切平面必定都是水平的(即垂直于 z 轴).

一个曲面的切平面是水平的恰恰表明这时垂直于此平面的向量平行于 z



轴. 这里所说的垂直向量(法向量)也就是函数 $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$ 的梯度,因而由

$$\nabla F = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

此向量平行于 z 轴当且仅当

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad 和 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

这个讨论启发了下面主要的定义.

定义　*设 $f(x,y)$ 为一个二元函数. 称点 (x_0,y_0) 为 f 的一个判别点是说,如果有*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \quad 和 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0,$$

或者这些偏导数之一不存在.

注　有了这个术语之后,那么如果偏导数都存在,则一个判别点就是此曲面在此的切平面为水平的点.

例 24.8　求函数 $f(x,y) = 2x^2 + 8x + y^2 - 3y + 11$ 的判别点.

当

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 8 = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3 = 0$$

时判别点存在. 因此$\left(-2, \frac{3}{2}\right)$是此曲面上唯一的判别点.

例 24.9 求函数$f(x,y) = \cos(x+y)$ 在区域$0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi$的判别点.

这时

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x+y),$$

判别点必定在$\sin(x+y) = 0$存在,那就是说当$x + y = \pi$. 因此有无穷多个判别点,每个具形式$(x, \pi - x), 0 \leqslant x \leqslant \pi$. 这些点在波谷形成一条直线并有一公共的切平面.

求极大值和极小值的三步法 由于定义在一个矩形上的函数$f(x,y)$ 的极大或极小值只能发生在判别点或矩形的边界点上,我们立刻得到一个求极大和极小值的三步法,它推广了 §10.1 的三步法.

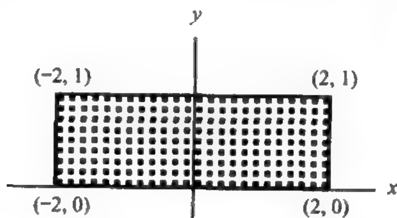
步骤 1 求在矩形内的所有判别点(x_0, y_0),它们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

步骤 2 定出此函数在这些判别点上达到的最大和最小值(如果判别点构成一条线,则使用 §10.1 的方法来完成这项任务).

步骤 3 求函数$f(x,y)$ 在矩形边界上的极大或极小值(这里又可能需要用到 §10.1 的方法). 确定这个值比在步骤 2 中得到的值$f(x_0, y_0)$ 是更大,还是更小.

例 24.10 求函数$f(x,y) = xy^2$ 在下面的矩形上的极大值和极小值.



步骤 1 偏导数为$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$. 令它们为 0 得到$y = 0$,因而判别点在

边界上.

步骤 2 对任意判别点$(x,0)$,函数取值$f(x,0)=0$.

步骤 3 我们用检验边界的其余部分的$f(x,y)$来完成这个分析.首先考虑由$(x,1)$组成的线段,其中$-2\leqslant x\leqslant 2$,即在点$(-2,1)$与$(2,1)$之间的线段.在此线段上$f(x,1)=x$,因而极大在$(2,1)$,极小在$(-2,1)$,其次我们必须考虑由$(2,y)$,$0\leqslant y\leqslant 1$组成的线段.这里有$f(2,y)=2y^2$,它在$(2,1)$极大.相似地,在由点$(-2,y)$构成的最后一条线段上$f(-2,y)=-2y^2$,其中$0\leqslant y\leqslant 1$,它在$(-2,1)$取极小而在$(-2,0)$取极大.

总起来我们有$f(x,y)$在$(2,1)$达到极大值$f(2,1)=2$,而在$(-2,1)$达到极小值$f(-2,1)=-2$.

例 24.11 求点$(1,2,0)$和平面$x+y-z=0$之间的最短距离.

设(x,y,z)为此平面上任一点.它到$(1,2,0)$的距离为

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(x+y)^2}.$$

此距离达到极小当且仅当此距离的平方极小(后一个函数易于处理).因此我们必须找出函数

$$s(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2+(x+y)^2$$

的判别点.令这些偏导数为0给出了方程

$$\frac{\partial s}{\partial x}=2(x-1)+2(x+y)=0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial y}=2(y-2)+2(x+y)=0.$$

它等价于方程

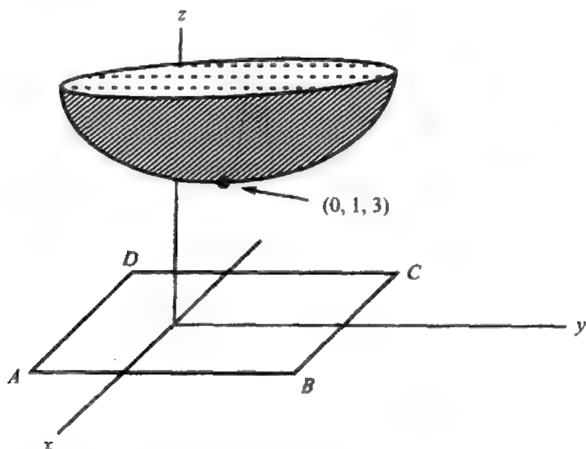
$$4x+2y=2,$$
$$2x+4y=4.$$

因此$(0,1)$为判别点,而在此判别点上$s(0,1)=1+1+1=3$.

提问 $(0,1)$是函数$s(x,y)$的极大,极小还是鞍点?

回答 我们断言$(0,1)$实际上是个极小点,因而原来问题的解是$\sqrt{3}$.可以在三维空间中画出函数$z=s(x,y)$的图像来直观地验证我们的断言.

为了给出一个正式的证明,必须考虑一个矩形$ABCD$,它非常大.举例说,我们可以考虑坐标为$A=(50,-50)$,$B=(50,50)$,$C=(-50,50)$,$D=(-50,-50)$的正方形.三步算法强使$s(x,y)$在此正方形上的极小必定出现在判别点$(0,1)$上或是正方形$ABCD$的边界上.但在此边界上或是$x=\pm 50$或是$y=\pm 50$,从而$s(x,y)\geqslant(48)^2$(它确实大于3).注意这个论证当正方形边长趋



向无穷时也有效. 结论是对 xy - 平面中所有的 (x,y) 有 $s(x,y) \geq 3$.

例 24.12 求函数 $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ 在矩形 $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ 上的极大值.

先取 $f(x,y)$ 的偏导数.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

令这些偏导数为 0 产生出单一的判别点 $(0,0)$. 但注意 $f(x,y)$ 的这些偏导数在 $(0,0)$ 没有定义. 事实上,这个函数当我们从任何方向趋向于 $(0,0)$ 时它急剧趋向无穷大,因此此函数无极大值.

注 这最后面的例题解释了在偏导数不存在的地方判别点可以出现.

§24.2 的习题

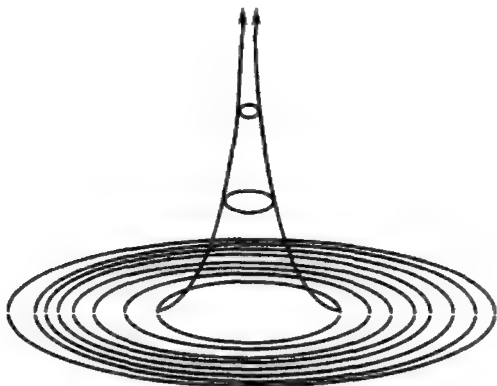
在习题(1) ~ (5) 中,求在所给矩形上 $f(x,y)$ 的极大和极小值. 用你的 CAS 制作所给函数的图,以此从直观上确认你的答案.

(1) $f(x,y) = 20 - 2x^2 + 4x - y^2 + 4y$ 对 $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4$.

(2) $f(x,y) = x^4 + 3xy$ 对 $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

(3) $f(x,y) = x^2 - xy - y^2 + 5y - 3$ 对 $-1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$.

(4) $f(x,y) = x^3y^2(3 - x - y)$ 对 $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$.



(5) $f(x,y) = y^2 + \cos(\pi x) - y$ 对 $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, 0 \leqslant y \leqslant 1$.

(6) 一运输公司要制作矩形的纸板箱(无盖). 如果每个箱子规定要有 4 立方英尺的体积. 使箱子耗用纸板最小则箱子应该有什么尺寸?

(7) 一家制箱公司在生产矩形带盖的胶合板箱. 假定每个箱要用 24 平方英尺的胶合板去制作. 使体积最大时此箱的尺寸应该是什么?

(8) 求在直线 $x = t, y = 3t - 1, z = 2t + 3$ 上一点,使它与点 $(1,0,-1)$ 最靠近.

(9) 求平面 $2x - 5y + z = 0$ 上一点使它与点 $(1,0,-1)$ 最靠近.

(10) 一长段电线(240 英寸长)被切成三段或更少的段数. 如果每段被弯曲成一个方形,那么应该如何切断才能使这些正方形的面积和最小?

(11) 考虑曲面 $z = \frac{2}{xy}$. 其判别点是什么?在矩形 $-1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1$ 上哪些 x, y 值使 z 极大或极小?用你的 CAS 作图以直观地确认你的答案.

(12) 求曲面 $z = \frac{2}{xy}$ 上的一个点,使它最靠近原点 $(0,0,0)$.

24.3　泰勒级数与判别点的分类

在本节我们先回忆一下单变量可微函数 $f(x)$ 关于 $x = 0$ 的泰勒级数(也称做麦克劳林级数)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots,$$

它在点 $x = a$ 产生了

$$f(a) = f(0) + f'(0)a + \frac{f''(0)}{2!}a^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}a^3 + \cdots. \tag{24.2}$$

我们想推广这个公式到二元可微函数 $z = f(x,y)$，将证明

$$f(a,b) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)b + \cdots,$$

其中高次项（没有在上面的展式中表出）涉及到高阶偏导数. 这个所需要的展开式可以由只能称做极其精妙的技巧得到，这个技巧将问题化到一维的泰勒级数.

固定数 a,b，我们定义一个一元函数 $F(t)$ 为

$$F(t) = f(at,bt).$$

注意，$F(1) = f(a,b)$. 当在展式(24.2) 中用 t 代替 a 时，我们得到了展开式

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \frac{F^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \cdots. \tag{24.3}$$

我们宣称，在计算出 $F(0)$，$F'(0)$，$F''(0)$ 等等，然后令 $t = 1$，便到达所希望有的展开式了.

叙述完这个计划的要点，现在转到（多少有些冗长的）计算上. (24.3) 中的首项是 $F(0)$，它仅仅是 $F(0) = f(0,0)$. F 的一阶导数由链规则得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(at,bt) = a\frac{\partial f}{\partial x}(at,bt) + b\frac{\partial f}{\partial y}(at,bt),$$

从而

$$F'(0) = a\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

二阶导数有一点复杂：

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F'(t)) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}(at,bt) + b\frac{\partial f}{\partial y}(at,bt)\right) \\ &= a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(at,bt) + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(at,bt) + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(at,bt), \end{aligned}$$

因此

$$F''(0) = a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0).$$

到此处已清楚如何进行下去（略去这些计算，因为它们颇为繁琐）. 上述计算与方程(24.3) 相结合产生出

$$
\begin{aligned}
F(t) &= f(at, bt) \\
&= f(0,0) + \left(a\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)t \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right)t^2 + \cdots.
\end{aligned}
$$

选取 $t = 1$，给出了我们开始所期望的展开式：

$$
\begin{aligned}
f(a,b) = &f(0,0) + \left(a\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \cdots \quad (24.4)
\end{aligned}
$$

(24.4) 右端所展示的项，被称做泰勒展式中**次数最多为 2 的项**.

尽管我们还没有选择去详述收敛性问题，它们却实质上已转化到了以前的研讨中，这是因为这个展式是从单变量函数的展式得到的.

例 24.13　对函数 $f(x,y) = e^{xy}$ 计算泰勒展式次数最高为 2 的项.

此计算需要下列导数：

$$
f(0,0) = e^0 = 1,
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = ye^{xy}\Big|_{x=0,y=0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = xe^{xy}\Big|_{x=0,y=0} = 0,
$$

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = y^2e^{xy}\Big|_{x=0,y=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = x^2e^{xy}\Big|_{x=0,y=0} = 0
$$

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = e^{xy} + xye^{xy}\Big|_{x=0,y=0} = 1.
$$

代入(24.4)，我们得到(似曾相识的) 展式

$$
e^{ab} = 1 + ab + \cdots,
$$

它显示了 e^{xy} 的泰勒级数中次数最多为 2 的项. 你能猜到更高次的项会是什么吗?多做一点便可证明

$$
e^{ab} = 1 + ab + \frac{(ab)^2}{2!} + \frac{(ab)^3}{3!} + \cdots.
$$

判别点的分类　设 $z = f(x,y)$ 是个二元可微函数，变量为 x, y. 如果在点 (x_0, y_0) 有

$$
f(x_0 + h, y_0 + k) \geqslant f(x_0, y_0)
$$

对充分小的 $|h|, |k|$ 成立，则说 f 在点 (x_0, y_0) 有一个**局部极小**，如果

$$
f(x_0 + h, y_0 + k) \leqslant f(x_0, y_0)
$$

对充分小的 $|h|, |k|$ 成立，则说 f 在 (x_0, y_0) 有一个**局部极大**.

我们已经证明过f在点(x_0,y_0)有局部极小或极大的一个必要条件,即曲面(在(x_0,y_0))的切平面是水平的,就是说(x_0,y_0)是个判别点. 仍需详尽阐述的是一个判别法,在给出了判别点后,它能决定此判别点是否是个局部极大,局部极小,抑或是个鞍点. 我们要陈述的**判别点判别法**满足这个需要,它是二阶导数判别法(见 §9.3)在二元函数的自然推广. 此判别法的验证,可由仔细考察所考虑函数的泰勒展开的二次项得到. 在后面的叙述中,$f(x,y)$代表一个以(x_0,y_0)为判别点的可微函数. 当我们计算在(x_0,y_0)的各种导数,譬如$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$时,为了符号上方便起见,将简单地写成$\frac{\partial f}{\partial x}$.

判别点判别法 设(x_0,y_0)为$f(x,y)$的一个判别点. 定义

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

则下列陈述成立:

(1) 如果$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$且$D > 0$,则$(x_0,y_0)$为局部极大.

(2) 如果$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$且$D > 0$,则$(x_0,y_0)$为局部极小.

(3) 如果$D < 0$,则(x_0,y_0)为一鞍点.

(4) 如果$D = 0$,则此判别法没有提供任何信息.

例 24.14 求出下列函数的判别点并分类:

(i)$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$,(ii)$f(x,y) = x^2 + y^2$,(iii)$f(x,y) = xy$.

这三种情形中$(0,0)$都是唯一的判别点. 用判别点判别法于每个函数以显露出它们在原点附近的不同表现.

(i)$D = (-2)\times(-2) - 0 = 4$,$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0$,因此$(0,0)$是局部极大.

(ii)$D = 4$,$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$表明$(0,0)$为局部极小.

(iii)$D = 0 - 1 < 0$,故$(0,0)$是个鞍点.

例 24.15 求函数

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

的判别点并分类.

这时的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^2-y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2},$$

因此(0,0) 是唯一的判别点. 现在二阶导数为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-2 + 4x^2)e^{-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-2 + 4y^2)e^{-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xye^{-x^2-y^2},$$

因此

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \bigg|_{x=0,y=0} = 4.$$

计算关于 x 的函数的二阶导数在原点的值,我们得到$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 < 0$. 我们看到(0,0) 是个局部极小.

§24.3 的习题

计算下列函数的泰勒展式次数最多为 2 的项.

(1)$f(x,y) = (x-y)^2$.　(2)$f(x,y) = (x+2y)^3$.　(3)$f(x,y) = \ln(2+x+y)$.

(4)$f(x,y) = e^{x-3y}$.　(5)$f(x,y) = \cos(x+xy)$.　(6)$f(x,y) = \sin(y-2xy)$.

求下列每个函数的判别点并分类. 用你的 CAS 作图以形象地确认你的答案.

(7)$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 + 2x + 6y$.　(8)$f(x,y) = 6 + x^2 + y^2 + 8x - 4y$.

(9)$f(x,y) = xy - 3x - 3y + 9$.　(10)$f(x,y) = 2x - x^3 - y^3$.

(11)$f(x,y) = 5xy - x^3 - y^3$.　(12)$f(x,y) = 6x + 12y - x^3 - y^3$.

(13)$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 8$.

(14) 证明下面每个函数

$$1 - x^2y^2, x^2y^2, x^3y^2$$

在(0,0) 有一个判别点,在用你的 CAS 画出的图中它分别是极大,极小和鞍点. 你能用判别点判别法证明这些吗?

24.4　拉格朗日乘子法

本章结尾我们要讲一个求多元函数极大和极小值的具有巨大威力的方法,它是由约瑟夫 · 拉格朗日(1736—1813) 发现的. 此法可用于具下面形式的问

题:

问题 求 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在约束条件 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$(g 为另一个函数) 下的极大值和极小值.

在科学和工程学中,一大类问题可以以这种形式被数学地建模.我们考察两个例子,这将帮助我们得到对此处理方法的一些感觉.

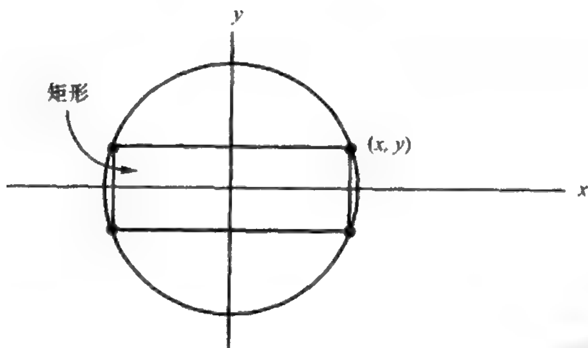
例 24.16 求点 (x_0,y_0,z_0) 和一个平面 $ax+by+cz=d$ 间的最短距离.

我们已经不止一次地遇到和解决过这个问题.我们现在将这个几何问题变换为具有约束条件的极小化问题.设 (x,y,z) 为该平面中任意一点.(x,y,z) 到 (x_0,y_0,z_0) 的距离平方由

$$f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$

给出.定义 $g(x,y,z)=ax+by+cz-d$.用这些适当的函数,我们的问题现在可以重新叙述为理想的形式:求对 $f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z)=0$ 下的极小值.

例 24.17 求内接于一个半径为 R 的圆的最大可容许的矩形.



这里所提的问题可重述于后:求面积函数 $f(x,y)=4xy$ 在约束条件 $g(x,y)=x^2+y^2-R^2=0$ 下的极大值.

我们引进下面一些记号来大大简化后面的解说:已知 n 维空间中点 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,$\phi=\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为一个 n 元函数.令 $\phi(P)$ 代表 $\phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.拉格朗日对求函数在约束条件下的极大值(或极小值)的一般性问题的解答,既是居高临下的又是直接的.它基于下面的命题,在其中引进了一个常数 λ(现在称其为**拉格朗日乘子**).

命题 24.18 设

$$f(x_1,\cdots,x_n),g(x_1,\cdots,x_n)$$

为两个 n 个变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的实函数,它们有所有阶的偏导数. 假设 f 在约束条件 $g=0$ 的条件下在点

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

存在极大值或极小值,其中 $\nabla g(P)\neq 0$,则对某个常数 λ 有

$$\nabla f(P)=\lambda\nabla g(P). \tag{24.5}$$

值得注意的是,这个简单的等式(24.5)融进了解决一般的极大、极小问题所需要的所有信息.

例 24.19　求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在约束条件 $2x+y=3$ 下的极小值.

我们先令 $9(x,y)=2x+y-3=0$. 梯度向量为

$$\nabla f=2x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}$$

和

$$\nabla g=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},$$

因此(24.5)成为

$$2x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}=\lambda(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}).$$

这个恒等式产生了方程

$$2x=2\lambda,$$
$$4y=\lambda,$$

其解为

$$x=\lambda=4y.$$

将 $x=4y$ 代入约束方程 $2x+y=3$,产生出 $9y=3$,因此 $y=\frac{1}{3}$. 结论是 $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$为所要的解,而 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 的极小值是

$$f\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{18}{9}=2.$$

例 24.20　求曲面 $z^2-2xy=3$ 上最靠近原点的点.

设(x,y,z)为此曲面上任一点. 此点到原点的距离为 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 因为只要求 $x^2+y^2+z^2$(距离的平方)的极小值就可以了,故我们的问题可以被重述于下:求 $x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $g(x,y,z)=z^2-2xy-3=0$ 下的极小值. 这时的梯度为

$$\nabla f=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k},$$
$$\nabla g=2y\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k};$$

因此(24.5)产生出

$$2x = -2y\lambda, 2y = -2x\lambda, 2z = 2z\lambda.$$

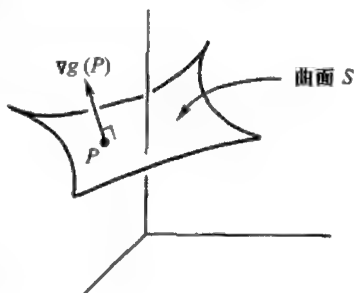
最后有 $\lambda = 1$ 及 $x = -y$. 将此解代入约束条件,我们有

$$z^2 + 2x^2 = 3.$$

因此在曲面 $z^2 - 2xy = 3$ 上与原点有最近距离的点必定有形式 $(x, -x, \sqrt{3-2x^2})$,其中 $\frac{-\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. 这些点是这曲面上的一条空间曲线.

命题 24.18 的证明梗概 这个证明所涉及的所有重要思想,在我们仅关注于三元函数时都出现了,从而我们只专门讨论三个变量的情形. 因此我们给出函数 $f(x,y,z)$,要在约束条件 $g(x,y,z) = 0$ 下求它的极大值(或极小值).

满足约束方程 $g(x,y,z) = 0$ 的点 (x,y,z) 的集合全在一个曲面上,我们称它为 S. 设 $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ 是个曲面 S 上使 $f(x,y,z)$ 取极大值(或极小值)的点. 由于 $\nabla g(P)$ 假设为非零,故它在 P 必定垂直于该曲面.



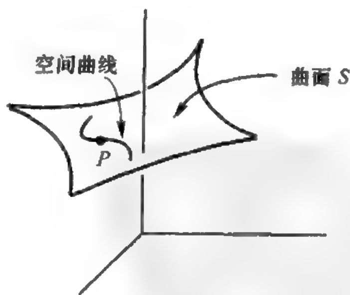
选取一条任意的空间曲线

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

它在曲面 S 上并通过点 P(对应于 $t = t_0$),即 $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$.

由定义,$f(x(t), y(t), z(t))$ 是单变量 t 的函数,并在 $t = t_0$ 达到极大值,因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t), z(t)) \bigg|_{t=t_0} = 0.$$



用链规则计算此导数,我们发现

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \nabla f \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t},$$

而在 t_0 对其赋值便得到

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \boldsymbol{r}'(t_0) = 0.$$

这个最后面的等式表明 $\nabla f(P)$ 垂直于 S 上所有通过点 P 的空间曲线. 因此我们推断 $\nabla f(P)$ 实际上垂直于 S 在 P 的切平面.

因为 $\nabla g(P)$ 也垂直于在 P 的切平面,由此知道 $\nabla f(P)$ 与 $\nabla g(P)$ 是平行

的向量，即存在一个实数 λ 使得

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P).$$

多个约束条件的情形　看到了拉格朗日乘子在一个约束条件的情形下如何有用之后，我们有了推广此方法的念头. 因此假定我们想对函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在多个约束

$$g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,$$
$$g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,$$

下求极大值. 这种情况引出了 k 个拉格朗日乘子，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 和方程组

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 + \cdots + \lambda_k \nabla g_k,$$
$$g_1 = 0, g_2 = 0, \cdots, g_k = 0,$$

我们必须解出它们.

例 24.21　求函数 $f(x,y,z) = 2x - y + z$ 的极大值，约束条件是 (x,y,z) 同时在平面 $x + y + z = 1$ 和圆柱面 $x^2 + y^2 = 4$（z 任意）上.

这时我们有两个约束条件：

$$g_1(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0,$$
$$g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

在这个例题中的各种梯度是

$$\nabla f = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$
$$\nabla g_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$
$$\nabla g_2 = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j},$$

从而方程 $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$ 变成

$$2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = (\lambda_1 + 2x\lambda_2)\boldsymbol{i} + (\lambda_1 + 2y\lambda_2)\boldsymbol{j} + \lambda_1\boldsymbol{k}.$$

因此 $\lambda_1 = 1$，

$$2 = 1 + 2x\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2x}$$

以及

$$-1 = 1 + 2y\lambda_2 \Rightarrow -2 = \frac{y}{x}.$$

我们最后有 $y = -2x$，将其代入第二个约束条件 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 得到一个变量的方程

$$x^2 + 4x^2 = 4.$$

这个方程的解是 $x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$，从而 $y=\mp\frac{4}{\sqrt{5}}$. 将这些代入第一个约束条件 $x+y+z=1$ 中，产生了 $z=1\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. $2x-y+z$ 在这两个约束条件下的极大值出现在点 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-4}{\sqrt{5}},1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$，而极大值是 $\frac{10}{\sqrt{5}}+1=1+2\sqrt{5}$. 注意，极大值出现在另一个点 $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}},1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

§24.4 的习题

用拉格朗日乘子法解下列所有最优化问题

(1) 证明内接于一个圆的最大可能的矩形为正方形.

(2) 求点 $(1,1,2)$ 与平面 $2x-y+3z=2$ 间的最短距离.

(3) 求函数 $2x^2+3y^2$ 在约束条件 $3x+4y=1$ 下的最小值.

(4) 求函数 $3x-y+4z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 上的极大和极小值.

(5) 在双曲线 $xy=5$ 上的哪个点使函数 $3x+2y$ 极小.

(6) 找出球面 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1$ 上离点 $(1,2,3)$ 最远的点.

(7) 用你的 CAS 画出椭球面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$. 在此椭球面上哪个点离原点最远?

(8) 求函数 x^2-y+2z^2-1 在约束条件 $z^2=x^4+y^4$ 下的极小值.

(9) 某航线允许携带的箱状行李的尺寸为长加宽加高最多为 100 英寸. 求这种盒最大可能的体积.

(10) 求函数 $2x^2+y^2+3z^2$ 在约束 $xyz=1$ 下的极小值.

(11) 求在平面 $x+y=2$ 与球面 $x^2+(y-3)^2+z^2=1$ 的交线上离原点最近和最远的点.

(12) 求 k 个变量的平均值 $\frac{1}{k}(x_1+x_2+\cdots+x_k)$ 在约束条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2=1$ 下的最大值.

(13) 求一点 (x_0,y_0,z_0) 与平面 $ax+by+cz=d$ 之间的最短距离公式.

(14) 求曲面 $z=2-\sin(x)-\cos(y)$ 上与原点最靠近的点.

第二十四章的附加习题

求 f 在点 P 增长最快的方向. 求在方向 $\boldsymbol{a}$ 的方向导数. 用你的 CAS 画出习题(1) ~ (5) 中的函数.

(1) $f(x,y) = 7x^3y^2 - 3$; $P = (2,3)$, $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$.

(2) $f(x,y) = xe^y - ye^x$; $P = (2,3)$, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.

(3) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$; $P = (1,0)$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$.

(4) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y)$; $P = (1,2)$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.

(5) $f(x,y) = \sqrt{(1-x)y}$; $P = (-2,3)$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$.

(6) 设 $f(x,y) = yx^3 + 4y^2$. 用你的 CAS 画出曲面并求使 $|\nabla f| = 10$ 的所有点.

(7) 在某座山上,其在海平面($z = 0$) 上高度由 $f(x,y) = 3000 - x^2 - 3y^2$ 英尺给出. 正 x 轴指向东,正 y 轴指北. 一登山者在点(2,10,2696) 处. 如果此登山者朝西,那么他将向上还是向下?如果走向东北又如何?他能朝着等高路径走吗?用你的 CAS 帮助你作图.

在已知区域求 $f(x,y)$ 的所有判别点并分类. 用你的 CAS 制作已知函数的图像以形象地确认你的答案.

(8) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$ 对 $-5 \leqslant x \leqslant -1/2$, $-5 \leqslant y \leqslant -1/2$.

(9) $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x - 2y)$ 对 $-\pi \leqslant x, y \leqslant \pi$.

(10) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$ 对 $-2 \leqslant x \leqslant 5$, $-5 \leqslant y \leqslant 1$.

(11) $f(x,y) = abxy + \dfrac{a}{x^2 + a^2} + \dfrac{b}{y^2 + b^2}$ 对所有 x, y.

(12) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2-2x+3y+2)}$ 对所有 x, y.

(13) $f(x,y) = xy^2$, 对 x, y 在第一象限并且 $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

(14) 求三个正数使其和为 100 而其积尽可能地大.

(15) 求三个正数使其和为 100 而其平方和尽可能地小.

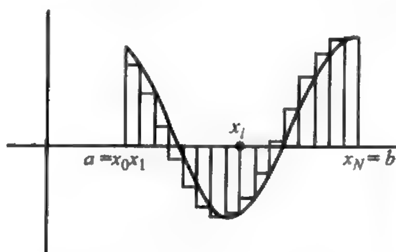
(16) 求 $f(x,y) = xy^2$ 在约束条件 $4x^2 + 8y^2 = 16$ 下的极大值.

(17) 求在抛物面 $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2$ 上离平面 $x + y + z = 0$ 最近的点.

第二十五章　二重积分

25.1　对单变量积分的回顾

作为对多重积分讨论的一个动机和导向，我们先对单变量情形作一简短的回顾. 因此考虑单变量 x 的任意连续函数 $y = f(x)$，它的图像画在下面.



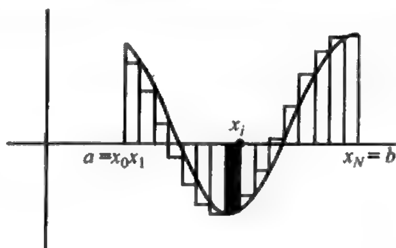
将区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 分割成 N 段（N 为一大数），我们已定义过

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\sum_{0=1}^{N} f(x_i)\,\frac{b-a}{N}.$$

这个积分被证实给出了曲线与 x 轴之间的面积，其中在 x 轴下方区域之面积被算作负的. 事实上，上面和中的每项

$$f(x_i)\frac{b-a}{N}(i=1,2,\cdots,N)$$

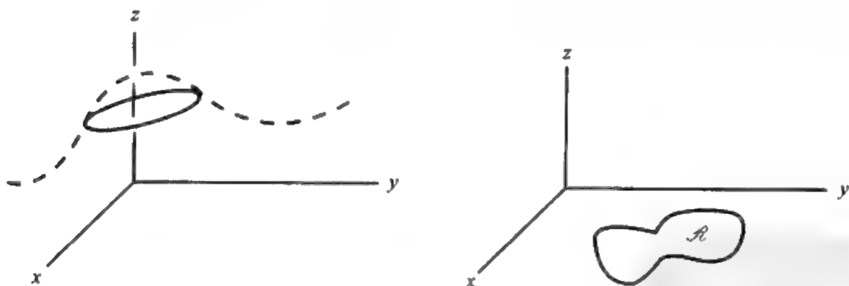
近似于第 i 个长方形样子和区域的面积,此区域为下面带阴影的部分.



现在把这些概念拓展到高维空间和多元函数.

25.2 二重积分

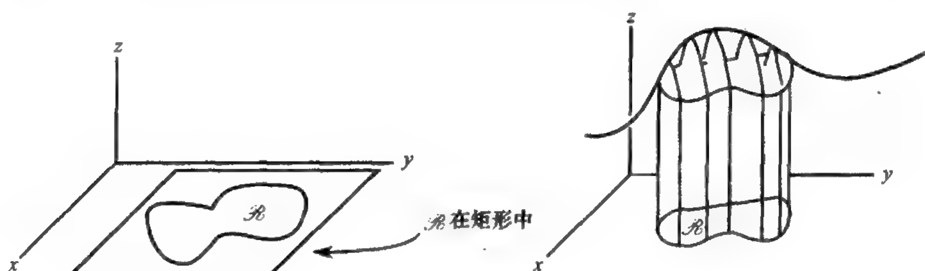
考虑两个变元 x,y 的连续函数 $z=f(x,y)$,如下左图所示. 设 $\mathscr{R}$ 为下右图的 xy - 平面中的一个二维区域.



为了分析区域 $\mathscr{R}$ 上的函数,我们需要做出一些假定以确保区域 $\mathscr{R}$ 是合理的,就是说就像上图那样地规矩. 我们做出的第一个假定为 $\mathscr{R}$ 是**有界的**. 这只是意味着 $\mathscr{R}$ 位于一个有限矩形(它被称做一个界定矩形)之中.

我们要做的第二个假定是 $\mathscr{R}$ 的边界是 xy - 平面中的一条连续曲线,它不自交.

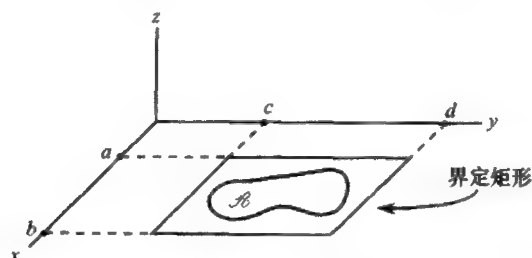
在假定函数 $z=f(x,y)$ 的图像显示位于 xy - 平面之上(即 $f(x,y)>0$) 时,我们直观地定义



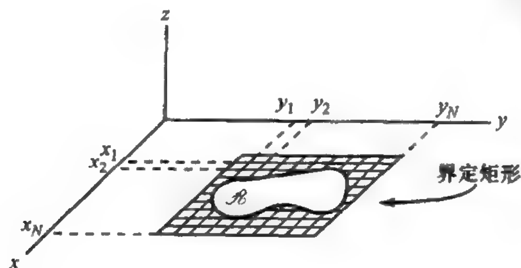
$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

为在区域 $\mathscr{R}$ 上方的那个立体的体积.

类比于单重积分定义那样,我们现在定义二重积分是一个和的极限. 假定界定矩形由所有 $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$ 的点 (x,y) 组成.



把一个矩形网格放在我们的界定矩形之上,此网格是由把此长方形每边分成 N 个相等的小块即 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$ 和 $c < y_1 < y_2 < \cdots < y_N = d$ 形成的.



注意我们的界定矩形，它因而被分成了 N^2 个小矩形，每个的面积为 $\frac{b-a}{N}\cdot\frac{d-c}{N}$. 为了从整个界定矩形中区分出 $\mathscr{R}$ 中的点，我们引进函数 $\delta_{\mathscr{R}}(x,y)$，它依照所考虑的点在或不在 $\mathscr{R}$ 中而分别取值 1 或 0，即定义 $\delta_{\mathscr{R}}(x,y)$ 为

$$\delta_{\mathscr{R}}(x,y)\begin{cases}1, & \text{如果}(x,y)\in\mathscr{R},\\ 0, & \text{如果}(x,y)\notin\mathscr{R}\end{cases}.$$

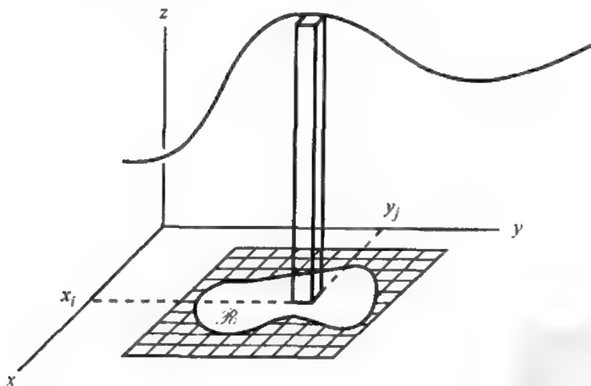
做好这些后，我们正式定义**二重积分**为

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_R(x_i,y_j)f(x_i,y_i)\frac{(b-a)(d-c)}{N^2}. \quad (25.1)$$

要看出这个定义确实获得了 R 上方那个立体的体积（在 $f(x,y)>0$ 的情形），留意

$$f(x_i,y_j)\cdot\frac{(b-a)(d-c)}{N^2}$$

近似地等于画在下图中的第 ij 个柱形的体积.

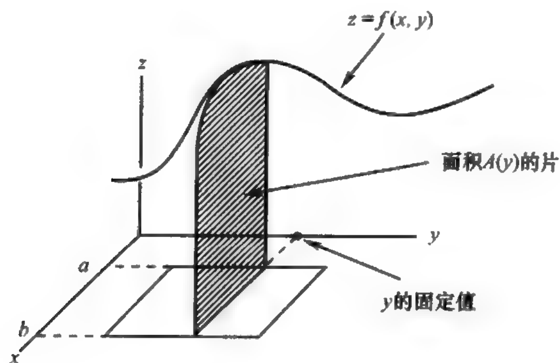


把所有在区域 $\mathscr{R}$ 内的 (x_i,y_j) 上方的这些体积加起来并取极限，我们便得到了在 $\mathscr{R}$ 上方的立体的体积.

当我们不再把注意力只局限于那些图像在 xy - 平面上方的函数时，积分的数值表现方式就类似于单变量的情形：积分由那些取正号和取负号的立体体积的和数给出，而符号的选取取决于 $z=f(x,y)$ 的图形显示是在 xy - 平面的上方还是下方. 下面关于二重积分的第一个例子表明，在矩形区域的情形，二重积分相当于单重积分的叠加.

例25.1(区域$\mathscr{R}$为矩形) 假设区域$\mathscr{R}=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$, $z=f(x,y)$ 为一连续函数. 计算$f(x,y)$ 在 R 上的积分.

如果我们固定一个 y 值,$c\leqslant y\leqslant d$,并设$A(y)$ 表示画在下面的片状物的面积.



于是

$$A(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

在曲面$z=f(x,y)$ 和矩形$\mathscr{R}$之间的立体区域的体积因而是面积$A(y)$ 的和的极限(即积分)(见 §16.3,作为横截面面积求积的体积),因此:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_c^d A(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{25.2}$$

相似地,我们可以固定区间$a\leqslant x\leqslant b$ 中一个 x 值并设$A_1(x)$ 代表由此立体与在 x 的平面(平行于 yz - 平面) 相交形成的区域的面积. 像前面一样,

$$A_1(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y, \tag{25.3}$$

并且再应用 §16.3 中的方法,我们便得到

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b A_1(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{25.4}$$

联合方程(25.3) 和(25.4),我们得到了**富比尼定理**:

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \tag{25.5}$$

应该提一下,有些场合,当在一个矩形上积分时,交换一下积分的顺序会实质性地带来更容易的计算.

例 25.2　设 $f(x,y) = 10 - x^2 - 3xy$,

$$\mathscr{R} = \{(x,y)\mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 2 \leqslant y \leqslant 3\}.$$

计算 $\iint\limits_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

我们有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_2^3\left(\int_0^1(10 - x^2 - 3xy)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_2^3\left(10x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2y}{2}\right)\Big|_0^1\mathrm{d}y \\ &= \int_2^3\left(10x - \frac{1}{3} - \frac{3y}{2}\right)\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{29}{3}y - \frac{3y^2}{4}\right)\Big|_2^3 \\ &= \frac{29}{3} - \frac{27}{4} + 3 = \frac{71}{12}.\end{aligned}$$

§25.2 的习题

计算下列在指定矩形上的积分. 在看起来似乎方便时,用富比尼定理改变积分顺序. 用 CAS 画出所讨论的体积以用体积来解释积分.

(1) $\int_1^3\int_0^1(x^2y - y^2 + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(2) $\int_{\frac{1}{2}}^1\int_1^3\left(1 + \frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(3) $\int_0^\pi\int_0^1 y\sin(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(4) $\int_0^\pi\int_0^1(\mathrm{e}^x\cos(y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(5) 求在抛物面下而在矩形 $\mathscr{R} = \{0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 上的立体体积. 用你的 CAS 画出此立体.

(6) 验证如果 f_1 和 f_2 为区域 $\mathscr{R}$ 上的连续函数,则

$$\iint\limits_{\mathscr{R}}(f_1 + f_2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathscr{R}} f_1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\mathscr{R}} f_2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(7) 验证如果 f 是区域 $\mathscr{R}$ 上的连续函数,c 为常数,则

$$\iint\limits_{\mathscr{R}} c\cdot f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\cdot\iint\limits_{\mathscr{R}} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(8) 假定区域 $\mathscr{R}_1$ 和 $\mathscr{R}_2$ 没有重合部分，f 为它们的并集 $\mathscr{R}=\mathscr{R}_1\cup\mathscr{R}_2$ 上的连续函数. 验证

$$\iint_{\mathscr{R}} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\mathscr{R}_1} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\mathscr{R}_2} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(9) 用(8)计算在 $f(x,y)=1$ 下而在中心是 $\left(\frac{3}{2},0,0\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$ 的两个单位正方形上的立体体积. 用 CAS 画出此立体.

(10) 设 $h(x,y)=f(x)\cdot g(y)$，其中 $f(x)$ 和 $g(y)$ 分别是区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 和 $c\leqslant y\leqslant d$ 上的连续函数. 设 $\mathscr{R}$ 为矩形 $\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$. 证明

$$\iint_{\mathscr{R}} h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_c^d g(y)\mathrm{d}y\right).$$

利用上面的(10)，计算下列积分.

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos(x))\cdot(\sin(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(12) $\int_1^1\int_0^e(y\cdot(\ln(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(13) 作出 $f(x,y)=x-2y$ 在

$$\mathscr{R}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$$

上的图，并将 $\mathscr{R}$ 分成 18 个小正方形，再用 CAS 计算适当的和数来对二重积分

$$\int_0^2\int_0^1(x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作近似计算. 把你的答案与积分的实际值进行比较.

(14) 对函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 重复上面的习题(13)..

25.3 二重积分的计算

设 $z=f(x,y)$ 为连续函数. 考虑在 xy - 平面上的区域 R(下图中的带阴影的部分)，其边界由已知连续函数 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 和矩形

$$\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$$

的边组成.

在这样的区域上的二重积分

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

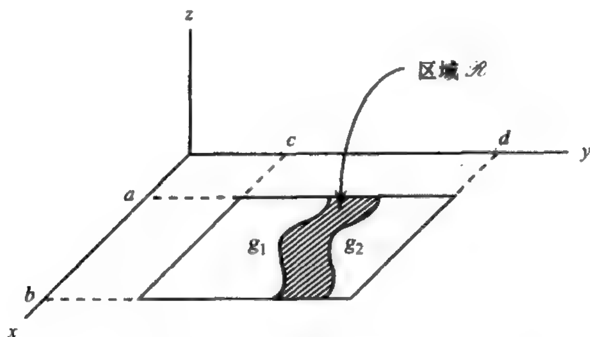
经常出现，而下面的命题给出计算它的一个方法.

命题 25.3　设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 为区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上定义的连续函数. 设

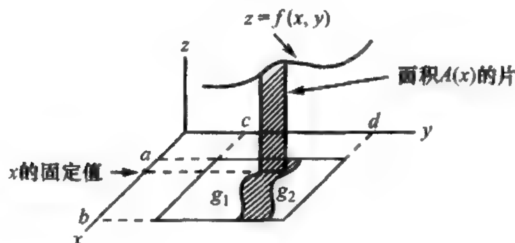
$$\mathscr{R}=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,g_1(x)\leqslant y\leqslant g_2(x)\}.$$

如果 $f(x,y)$ 在 $\mathscr{R}$ 上连续，则

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.\tag{25.6}$$



证明　对区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 中一个固定的 x，令 $A(x)$ 表示画在下图那一片的面积.



由定义，$A(x)$ 由积分

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

给出. 在 $\mathscr{R}$ 和曲面 $z = f(x,y)$ 之间的立体区域的体积因此是 $A(x)$ 的积分，那么我们就已经证明了命题：

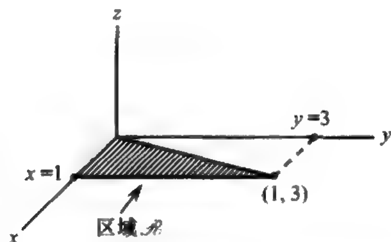
$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

命题 25.3 表明许多二重积分可以被转换为累次的单重积分. 鉴于前面（譬如第十七章），已发展起来的技术，我们在命题 25.3 中有了用于计算二重积分的一个有力的方法. 现用多个例题来解释它.

例 25.4（三角形区域）　考虑由 x 轴，直线 $y=3x$（其中 $0\leqslant x\leqslant 1$）和直线 $x=1$ 围成的区域 $\mathscr{R}$. 计算

$$\iint_{\mathscr{R}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

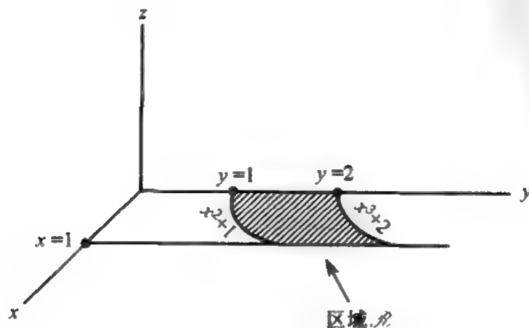
我们首先描画出区域 $\mathscr{R}$.



这时 $g_1(x)=0, g_2(x)=3x$，我们可以计算此积分如下：

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{R}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\left(\int_0^{3x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=3x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\left(3x^3+\frac{27x^3}{3}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{3x^4}{4}+\frac{9x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 3.\end{aligned}$$

例 25.5　设 $\mathscr{R}$ 为由曲线 $y=x^2+1, y=x^3+2$ 和直线 $x=0, x=1$ 围成的区域. 计算



$$\iint\limits_{\mathscr{R}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这时的区域被画在上图中，此积分计算如下：

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathscr{R}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\left(\int_{x^2+1}^{x^3+2} xy\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{xy^2}{2}\Big|_{y=x^2+1}^{y=x^3+2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x((x^3+2)^2-(x^2+1)^2)}{2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x(x^6+4x^3+4)-(x^4+2x^2+1)}{2}\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{x^8}{16}+\frac{2x^5}{5}+x^2-\frac{x^5}{10}-\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{16}+\frac{2}{5}+1-\frac{1}{10}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

注　有些情形，最方便的描述区域 $\mathscr{R}$ 的形式是

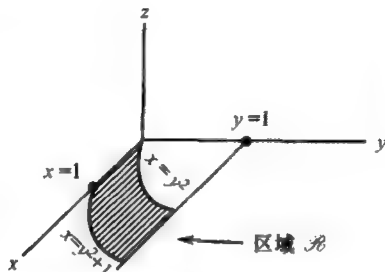
$$\mathscr{R} = \{(x,y)\mid h_1(y)\leqslant x\leqslant h_2(y), c\leqslant y\leqslant d\},$$

即 $\mathscr{R}$ 是由曲线 $x = h_1(y), x = h_2(y)$ 和直线 $y = c, y = d$ 围成的. 这时我们有一个命题 25.3 的类比：$f(x,y)$ 在 $\mathscr{R}$ 上的积分由

$$\iint\limits_{\mathscr{R}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \tag{25.7}$$

给出.

例 25.6　计算 $\iint\limits_{\mathscr{R}}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\mathscr{R}$ 是由曲线 $x = y^2, x = y^2+1$ 和直线 $y = 0, y = 1$ 围成的区域.



描绘 $\mathscr{R}$ 如上图，而积分的计算为

$$\iint\limits_{\mathscr{R}}(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{y^2+1}(x+y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_{x=y^2}^{x=y^2+1}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\left(\frac{(y^2+1)^2}{2}+y^3+y-\frac{y^4}{2}-y^3\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\left(y^2+\frac{1}{2}+y\right)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{3}.$$

例 25.7(反转积分顺序) 在积分

$$\int_0^1\left(\int_y^{y^2}(x+y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

中反转积分的顺序.

在此例题中积分的区域由满足

$$0\leqslant y\leqslant 1, y\leqslant x\leqslant y^2$$

的点(x,y) 的集合构成. 这可以重写为

$$0\leqslant y\leqslant x\leqslant y^2\leqslant 1,$$

或者

$$0\leqslant x\leqslant 1,\sqrt{x}\leqslant y\leqslant x.$$

因此

$$\int_0^1\left(\int_y^{y^2}(x+y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^{x}(x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

§ 25.3 的习题

在下列习题中计算所给区域 $\mathscr{R}$ 上的二重积分$\iint\limits_{\mathscr{R}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 用你的 CAS 得到 $\mathscr{R}$ 的一张略图以及 $z=f(x,y)$ 在 $\mathscr{R}$ 中的一块.

(1) $f(x,y)=xy$,其中 $\mathscr{R}$ 是由直线 $x=0, y=3x$ 和 $y=6$ 围成的三角形区域.

(2) $f(x,y)=x^2+y^2$,其中 $\mathscr{R}$ 是由 x 轴,直线 $x=2$ 和 $y=x+1$ 围成的三角形区域.

(3) $f(x,y)=x+y$,其中 $\mathscr{R}$ 是由曲线 $y=x^3, y=x^2+2$ 和直线 $x=0$ 和 $x=1$ 围成的区域.

(4) $f(x,y)=x^2y-x$,其中 $\mathscr{R}$ 是由曲线 $y=x^4, y=x^3+3$ 和直线 $x=0$ 和 $x=1$ 围成的区域.

(5) $f(x,y) = 2x^3y + xy$,其中 $\mathscr{R}$ 是由曲线 $x = y^2, x = y^2 + 2$ 和直线 $y = 0$ 和 $y = 1$ 围成的区域.

(6) $f(x,y) = 2x - y$,其中 $\mathscr{R}$ 是由曲线 $x = y^3, x = y^4 + 3$,和直线 $y = 1$ 和 $y = 2$ 围成的区域.

(7) $f(x,y) = 4y$,其中 $\mathscr{R}$ 是由 x 轴和曲线 $y = \sin(x), 0 \leqslant x \leqslant \pi$ 围成的区域.

(8) $f(x,y) = x + y$,其中 $\mathscr{R}$ 由曲线 $y = x^2, y = x^3 (0 \leqslant x \leqslant 1)$ 围成的区域.

(9) $f(x,y) = x + y$,其中 $\mathscr{R}$ 是由曲线 $x = y^2, x = y^3 (0 \leqslant y \leqslant 1)$ 围成的区域.

(10) $f(x,y) = 3x$,其中 $\mathscr{R}$ 是圆盘 $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

(11) $f(x,y) = 3y$,其中 $\mathscr{R}$ 是圆盘 $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

(12) $f(x,y) = x + y$,其中 $\mathscr{R}$ 是圆盘 $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

在余下的习题中反转积分的顺序. 用你的 CAS 计算两种积分来检验答案.

(13) $\int_0^1 \left(\int_0^{y^4} x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

(14) $\int_1^3 \left(\int_y^{y^2} (x^2 - y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

(15) $\int_0^2 \left(\int_x^{2x^3} y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

(16) $\int_0^1 \left(\int_{2\sqrt{x}}^{x} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

25.4　极坐标下的二重积分

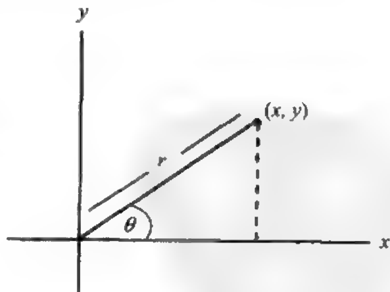
有一点是清楚的,即不管我们在积分上技术如何高超,二重积分完全是个挑战. 困难在于上面积分的区域可能是由一个复杂的描述给出的(即由那些错综复杂的函数给出的曲线围成的). 如果从不同的几何角度譬如极坐标来看待我们的区域,其结果是计算可以被大大地简化.

回想在 xy - 平面中任意一个点 (x,y). 可以令

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$$

转换为极坐标 (γ,θ). 进一步我们可以把两个变量 x,y 的函数

$$z = f(x,y)$$



转换为极坐标 (γ,θ) 的函数为

$$z = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

例 25.8　将函数 $z = x^2 + 2x + y^2$ 转换为两个极坐标变量 (γ,θ) 的函数.

替换 $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ 到我们的函数 $z = x^2 + 2x + y^2$ 中产生了

$$\begin{aligned} z &= \gamma^2(\cos(\theta))^2 + 2r\cos(\theta) + \gamma^2(\sin(\theta))^2 \\ &= \gamma^2((\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2) + 2\gamma\cos(\theta) \end{aligned}$$

$$= \gamma^2 + 2\gamma\cos(\theta).$$

因此 $z = \gamma^2 + 2\gamma\cos(\theta)$ 是所需要的极函数.

我们现在转向一般的二重积分

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{25.8}$$

其中$f(x,y)$ 是在有界区域$\mathscr{R}$上的连续函数. 如果$\mathscr{R}$是圆形状的(或明显的一个极坐标区域),则将整个积分变换为极坐标下的积分可能使计算(25.8) 在实质上更加容易. 我们现在详细阐述这是如何做的.

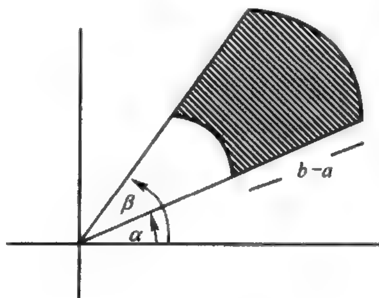
要开始这个解说需要**标准极区域**这个概念. 固定实数 $a < b$ 和 $\alpha < \beta$. 定义一个**标准极区域**为集合

$$\{(x,y) \mid x = \gamma\cos(\theta), y = \gamma\sin(\theta), a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}.$$

在极坐标下的标准极区域具有我们熟悉的形式

$$\{(r,\theta) \mid a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\},$$

它被描绘于下.

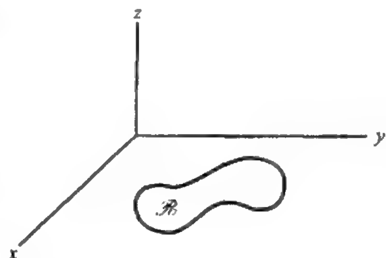


标准极区域的面积A(其推导见 §22.3) 由下面公式给出:

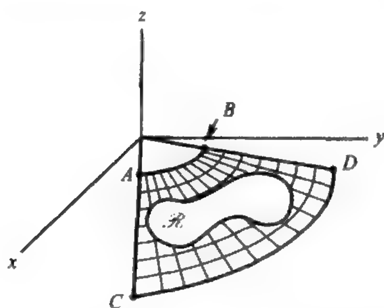
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}b^2(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}a^2(\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}(a + b)(b - a)(\beta - \alpha). \end{aligned} \tag{25.9}$$

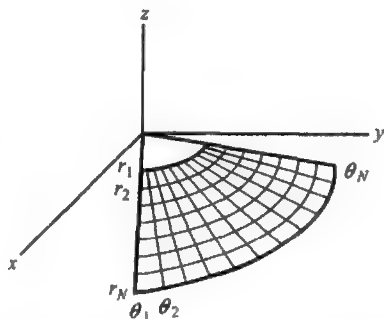
现在回到在 xy - 平面上的已知区域 $\mathscr{R}$.

我们打算将前面所考虑过的矩形网格(在有界矩形上)换为在一个标准极区域上的一个**极网格**,此极区域(下图中的 $ABCD$)围住了我们的区域.

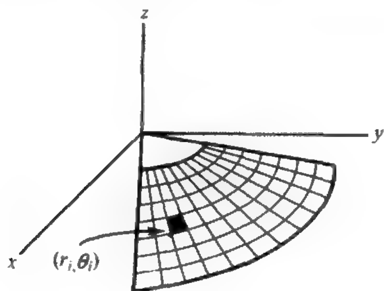


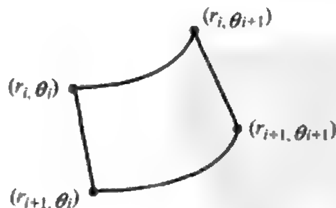
把外围的标准极区域的每边分成 N 等分来构造极网格并产生了 N^2 个较小的标准极区域的网格(这里的 N 自然是个大整数).





为了利用我们的网格,我们专注于涂了阴影的在(r_i, θ_i)的小小的标准极区域,并试着计算它的面积.把此标准极区域置于"显微镜"下并标出它的端点,





我们有:其中 $r_{i+1} - r_i = \dfrac{b-a}{N}, \theta_{i+1} - \theta_i = \dfrac{\beta - \alpha}{N}$. 因此由(25.9)这个小小的标准极区域的面积是

$$\frac{1}{2}(r_{i+1}+r_i)(r_{i+1}-r_i)(\theta_{i+1}-\theta_i)=\frac{1}{2}(r_{i+1}+r_i)\frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{N^2}.$$

我们现在要在极坐标下计算原来的积分. 定义函数

$$\delta_{\mathscr{R}}(r,\theta)=\begin{cases}1, & \text{如果}(r,\theta)\in\mathscr{R}\\ 0, & \text{如果}(r,\theta)\notin\mathscr{R},\end{cases}$$

它把此区域外的和区域里面的点区分开来. 二重积分(25.8)现在可以被表示为下面和的极限:

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathscr{R}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_R(r_i,\theta_i)\cdot f(r_i\cos(\theta_j),r_i\sin(\theta_j))\cdot\\&\quad\frac{1}{2}(r_i+r_{i+1})\cdot\frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{N^2}.\end{aligned}\tag{25.10}$$

回忆 $r_{i+1}-r_i=\frac{b-a}{N}$,我们有

$$\frac{1}{2}(r_i+r_{i+1})=r_i+\frac{1}{2}\frac{b-a}{N}.$$

对极大的 N,我们有

$$\frac{1}{2}(r_i+r_{i+1})=\left(r_i+\frac{1}{2}\frac{b-a}{N}\right)\approx r_i.$$

将此代入(25.10)得

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathscr{R}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_R(r_i,\theta_j)f(r_i\cos(\theta_j),r_i\sin(\theta_j))r_i\frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{N^2}.\end{aligned}$$

我们断言上式右端即是极积分:

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathscr{R}}f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_R(r_i,\theta_j)f(r_i\cos(\theta_j),r_i\sin(\theta_j))r_i\frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{N^2}.\end{aligned}\tag{25.11}$$

要证明这个等式,回想一下我们已经在 §25.2 中证明了对任意在 $\mathscr{R}$ 连续的函数 g,有

$$\iint_{\mathscr{R}}g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_R(x_i,y_j)g(x_i,y_j)\cdot\frac{(b-a)(d-c)}{N^2}.\tag{25.12}$$

另外,可以随意地改变变量的符号,用(r,θ)换掉(x,y),(α,β)换掉(c,d). 因而我们有

$$\iint_{\mathscr{R}} g(r,\theta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_R(r_i,\theta_i)g(r_i,\theta_j)\cdot\frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{N^2}.$$

现在选择$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cdot r$,便推导出(25.11).

我们的讨论建立了基本公式

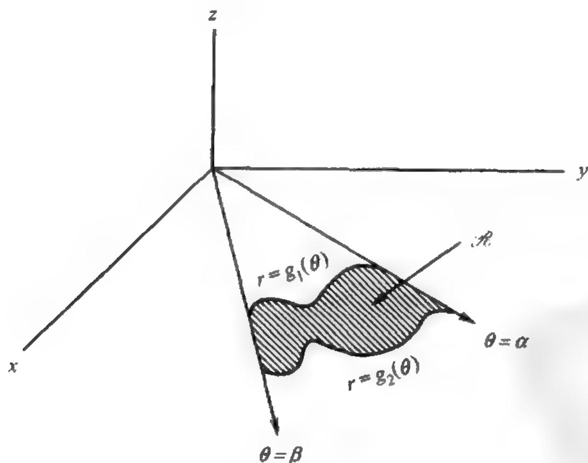
$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{R}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{25.13}$$

25.5　极坐标下二重积分的计算

考虑在$r\theta$-平面中一个有界区域$\mathscr{R}$,其边界由已知函数$g_1(\theta)$,$g_2(\theta)$和直线$\theta=\alpha$,$\theta=\beta$组成. 由定义,区域$\mathscr{R}$由包含了满足条件

$$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, g_1(\theta)\leqslant r\leqslant g_2(\theta)$$

的点(r,θ)组成.



这时(类比于命题25.3)我们有等式

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta. \tag{25.14}$$

例 25.9(在原点的圆盘)　设$\mathscr{D}$为半径a,中心在xy-平面原点的圆盘. 计算积分

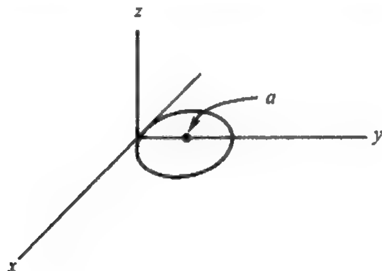
$$\iint_{\mathscr{D}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

区域$\mathscr{D}$对极坐标下的积分来说是个完美的选择. 我们先把$\mathscr{D}$作为一个极区域描述:每个点$(r,\theta) \in \mathscr{D}$满足$0 \leqslant r \leqslant a$和$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 因此

$$\iint_{\mathrm{D}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a ((r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2) r\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r^3 \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi a^4}{4}.$$

例 25.10(平移了的圆盘) 设$\mathscr{D}$为半径a,中心在$x = a, y = 0$的圆盘.



计算积分

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

我们还是首先用极坐标来表达$\mathscr{D}$. 将$\mathscr{D}$在直角坐标中的方程

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

通过变换$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$转换为极坐标来完成此项工作. 我们得到

$$(r\cos(\theta) - a)^2 + (r\sin(\theta))^2 = a^2.$$

展开此方程给出

$$r^2(\cos(\theta))^2 - 2ar\cos(\theta) + a^2 + r^2(\sin(\theta))^2 = a^2,$$

因而有

$$r = 2a\cos(\theta),$$

其中$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. 所讨论的积分现在可计算如下:

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos(\theta)} r\cos(\theta) \cdot r\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)\left(\int_0^{2a\cos(\theta)}r^2\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)\ \frac{(2a\cos(\theta))^3}{3}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(\theta))^4\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8a^3}{3}\cdot\frac{3\pi}{8}=\pi a^3$$

§25.5 的习题

在下列习题中,用转换为极坐标的方法计算区域 $\mathscr{R}$ 上的二重积分 $\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 用你的 CAS 得出 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}$ 上曲面 $z=f(x,y)$ 一片段的描绘图.

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$,其中 $\mathscr{R}$ 为圆盘 $x^2+y^2\leqslant 4$ 在第二象限中的那部分.

(2) $f(x,y)=y$,其中 $\mathscr{R}$ 为半径 2,中心在 $(2,0)$ 的圆盘.

(3) $f(x,y)=xy$,其中 $\mathscr{R}$ 为圆盘 $x^2+y^2\leqslant 9$.

(4) $f(x,y)=x$,其中 $\mathscr{R}$ 为由直线 $y=0$, $y=\sqrt{3}\cdot x$ 和半径为 1(中心在原点)的圆围成的区域.

(5) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,其中 $\mathscr{R}$ 是心形线 $r=1+\sin(\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 围成的区域.

(6) $f(x,y)=y$,其中 $\mathscr{R}$ 是由蚶线 $r=3+2\cos(\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 围成的区域.

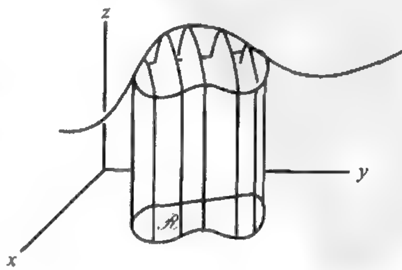
25.6　用二重积分计算面积和体积

在 §25.2 中我们已经证明,如果 $z=f(x,y)$ 是在 xy - 平面上一有界区域 $\mathscr{R}$ 上的连续非负函数,则在曲面 $z=f(x,y)$ 下方和 $\mathscr{R}$ 上方之间立体的体积 V 由二重积分

$$V=\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (25.15)$$

给出,但需假设此积分存在. 区域 $\mathscr{R}$ 的面积可以由此二重积分令 $f(x,y)=1$ 重现出来:

$$A=\iint_{\mathscr{R}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (25.16)$$



我们以若干例题来解释这些公式(这将表

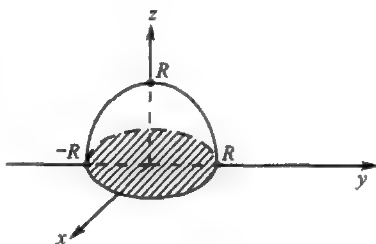
明二重积分较之于单重积分更容易计算体积和面积)．

例 25.11　求在曲面 $z = xy + e^x$ 和 xy－平面上矩形 $\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ 之间的立体的体积．

方程(25.15)规定了

$$V = \int_0^2 \left(\int_0^1 (xy + e^x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\frac{y}{2} + e - 1 \right) \mathrm{d}y = 1 + 2e - 2 = 2e - 1.$$

例 25.12　求半径 R 的球的体积．这个例子的几何图形显然适合于极坐标．在 xy－平面上半径为 R 的那个带阴影的圆由所有点 (r,θ)，$0 \leqslant r \leqslant R$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 组成．进一步，我们断言此半球面由极函数



$$z = \sqrt{R^2 - r^2} \qquad (25.17)$$

给出．

要验证它，我们注意到在直角坐标下任意在此半球面上的点 (x,y,z) 满足方程 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，这意味着

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

转换为极坐标(即令 $x = r\cos(\theta)$，$y = r\sin(\theta)$)便有了(25.17)．

所讨论的体积因而有了一个用极坐标的二重积分形式

$$V = 2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta$$

我们用替换

$$u = R^2 - r^2, \mathrm{d}u = -2r\mathrm{d}r$$

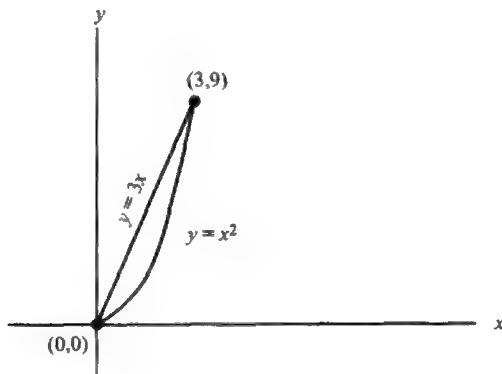
来计算那个内层的积分，它让我们容易地算出想要的体积：

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_{R^2}^0 \sqrt{u} \cdot \frac{-\mathrm{d}u}{2} \right) \mathrm{d}\theta \\ &= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{R^2} \sqrt{u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2} \right) \mathrm{d}\theta \\ &= 2 \cdot \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

例 25.13　通过二重积分计算由曲线 $y = x^2$ 和 $y = 3x$ 围成的 xy－平面上的区域的面积 A．

按照(25.16)，此区域的面积由下面的二重积分得到：

$$A = \int_0^3 \left(\int_{x^2}^{3x} 1 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^3 (3x - x^2) \mathrm{d}x = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}.$$



§25.6 的习题

用二重积分求下列在 xy – 平面上区域 $\mathscr{R}$ 的面积. 用你的 CAS 画出每个 $\mathscr{R}$ 的边界.

(1) $\mathscr{R}$ 为第一象限中由曲线 $y = x^2$ 和 $y = x^4$ 围成的区域.

(2) $\mathscr{R}$ 为第一象限中由曲线 $x = y^2$ 和 $x = y^4$ 围成的区域.

(3) $\mathscr{R}$ 为曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = -3x - 2$, $-2 \leqslant x \leqslant -1$ 围成的区域.

(4) $\mathscr{R}$ 的两个圆盘 $x^2 + y^2 \leqslant 4$ 和 $x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4$ 的相交部分.

(5) $\mathscr{R}$ 为直线 $y = x$ 和曲线 $x + y^2 = 2$ 围成的区域.

(6) $\mathscr{R}$ 为第一象限中由直线 $y = 1 - x$ 和曲线 $y = \dfrac{2}{x}$ 围成的区域.

(7) $\mathscr{R}$ 是半径 r 的圆.

求下列立体 Ω 的体积.

(8) Ω 是在平面 $2x + y - z = 2$ 之下而在矩形 $1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 之上的立体区域.

(9) Ω 是在平面 $x - 2y + 3z = 4$ 之下而在矩形 $-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2$ 之上的立体区域.

(10) Ω 是在曲面 $z = x^2y + e^x$ 和矩形 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 之间的立体区域.

(11) Ω 是位于曲面 $z = \sin(\pi(x + y))$ 和矩形 $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{2}$ 之间的立体区域.

(12) Ω 是在椭圆抛物面 $z = x^2 + 2y^2$ 之下而在顶点为 $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$ 的三角形之上的立体区域.

(13) Ω 是位于曲面 $z = x^2y$ 之下而位于(xy – 平面的) 由直线 $y = x$ 和曲线 $y = x^2$ 围成的区域之上的立体区域.

25.7 二重积分的换元法

设$z = f(x,y)$为定义在有界区域$\mathscr{R}$上的连续函数. 在 §25.4 中我们已显示在变化到极坐标(通过$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$)后二重积分变换为

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{R}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

即 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 变换为 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. 基于这个成功的经验,我们受启发,提出下面更一般的问题:

问题　如果考虑任意一个换元

$$x = g_1(u,v), y = g_2(u,v)$$

其中 u,v 为新变量,我们如何把二重积分

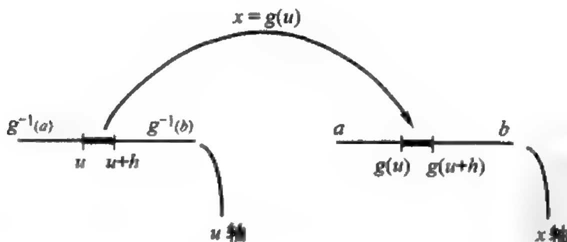
$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

变换为涉及变量 u 和 v 的积分?

由于函数$f(x,y)$显然变换为$f(g_1(u,v), g_2(u,v))$,故所考虑的问题等于是问 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发生了什么变化?

为了处理这个问题,我们首先回顾单变元的情形. 考虑变换

$$x = g(u)$$



其中 u 为新变量,g 为可微的一对一的函数,从几何上看,我们有下面的图形.

当 $h \to 0$ 时在 u 轴上的小区间$[u, u+h]$被变换为区间$[g(u), g(u+h)]$,由于按假定 g 是可微的(因而连续),它自身也是个小区间. 因此

$$\mathrm{d}x \approx g(u+h) - g(u) \approx g'(u)\mathrm{d}u$$

从而任一积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

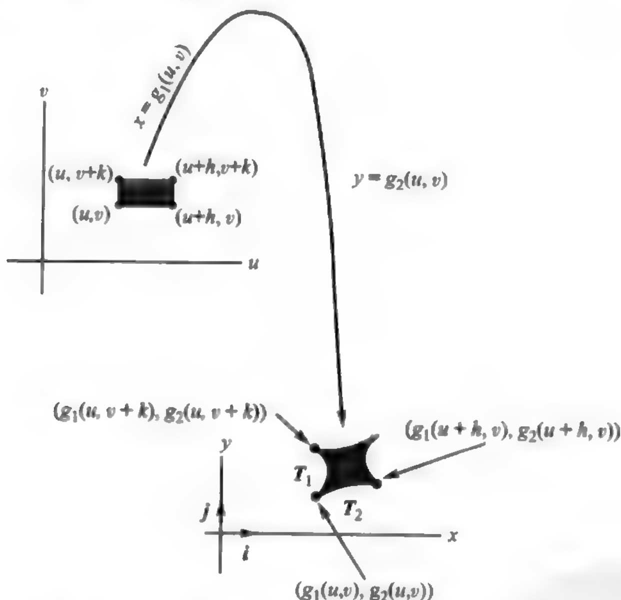
变为

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)\mathrm{d}u$$

在两个变量的情形,当我们有变换

$$x = g_1(u,v), y = g_2(u,v)$$

其中 g_1, g_2 为可微的一对一函数, u, v 为新变量时,定义 $g^{-1}(\mathscr{R})$ 为所有使得 $((g_1(u,v), g_2(u,v)) \in \mathscr{R}$ 的点 (u,v) 的集合. 我们将假定每个点 $(x,y) \in \mathscr{R}$ 都是 u,v - 平面中一个唯一的点 (u,v) 的像. 几何上看,这个变换在一个小矩形上的影响是把它朝四个方向拉.



当 $h, k \to 0$ 时,在 uv - 平面上一个小矩形的面积增量被变换为 xy - 平面中一个小的面积增量. 设 $\boldsymbol{T}_1$ 和 $\boldsymbol{T}_2$ 为 xy - 平面上的向量,它近似于 xy - 平面上面积增量的边. 由定义,

$$\boldsymbol{T}_1 = (g_1(u,v+k) - g_1(u,v))\boldsymbol{i} + (g_2(u,v+k) - g_2(u,v))\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{T}_2 = (g_1(u+h,v) - g_1(u,v))\boldsymbol{i} + (g_2(u+h,v) - g_2(u,v))\boldsymbol{j},$$

因此

$$\boldsymbol{T}_1 \approx \left(\frac{\partial g_1}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g_2}{\partial v}\boldsymbol{j}\right)\mathrm{d}v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j}\right)\mathrm{d}v$$

$$T_2 \approx \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g_2}{\partial u}\boldsymbol{j}\right)\mathrm{d}u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j}\right)\mathrm{d}u$$

然而 uv – 平面上此区域的面积近似地由这两个向量 $\boldsymbol{T}_1$ 和 $\boldsymbol{T}_2$ 的叉积,即

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx |\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

给出. 上面的计算使我们想出了下面的重要定义.

定义 设 $x = g_1(u,v), y = g_2(u,v)$ 为可微函数,它们定义了一个变量替换. 这个变换的**雅可比(行列式)**被定义为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{25.18}$$

对前面讨论的仔细而详尽阐述产生出下面的命题.

命题 25.14 设 $f(x,y)$ 为 xy – 平面中一个有界区域 $\mathscr{R}$ 上的连续函数. 设

$$x = g_1(u,v), y = g_2(u,v)$$

为坐标变换,其中函数 g_1 和 g_2 假定为一对一和可微的. 那么在假定每个 $(x,y) \in \mathscr{R}$ 都是(uv – 平面的)某个唯一的点 (u,v) 的像,则下面的等式成立:

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{g^{-1}(\mathscr{R})} f(g_1(u,v), g_2(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{25.19}$$

但假定对所有 $(u,v) \in g^{-1}(\mathscr{R})$,

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \neq 0.$$

例 25.15 计算由 $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ 给出的极坐标变换的雅可比.
由定义我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (\cos(\theta))\cdot(r\cos(\theta)) - (-r\sin(\theta))\cdot(\sin(\theta)) \\ &= r((\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2) = r.\end{aligned}$$

例 25.16 计算变换 $x = uv$ 和 $y = \dfrac{u}{v}$ 的雅可比.

这时我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= v\left(\frac{-u}{v^2}\right) - \left(u\cdot\frac{1}{v}\right) = \frac{-2u}{v}.\end{aligned}$$

例 25.17　已知数 $a,b>0$,证明

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}u = \pi ab.$$

我们用一个经典的技巧来算此积分. 想法是消去区域 $\mathscr{R}$ 的定义的分母. 设 $x=au$ 和 $y=bv$. 于是

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = ab,$$

从而我们的积分成为

$$\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} ab\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \pi ab,$$

这是因为单位圆的面积为 π.

例 25.18　用换元 $x=uv, y=\frac{u}{v}$ 变换二重积分

$$\iint\limits_{\substack{xy+\frac{x}{y}\leqslant 1\\ x,y>0}} y^{-1}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

为一个 uv − 积分.

恰如例 25.16,25.17 那样,这里提出的换元是由于我们期望把原来的区域转换为能更容易处理的区域(这里是一个圆)而想出来的. 这个变换的雅可比在例 25.16 中算过,即

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{-2u}{v},$$

因此

$$\iint\limits_{\substack{xy+\frac{x}{y}\leqslant 1\\ x,y>0}} y^{-1}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{u^2+v^2\leqslant 1\\ uv>0}} \frac{v}{u}\mathrm{e}^{uv}\left|\frac{2u}{v}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= 2\iint\limits_{\substack{u^2+v^2\leqslant 1\\ uv>0}} \mathrm{e}^{uv}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

§ 25.7 的习题

用你的 CAS 计算下列变换的雅可比.

(1) $x=r\sin(\theta), y=r\cos(\theta)$.　　(2) $x=3u+2v, y=u-v$.

(3) $x=v\mathrm{e}^{u}, y=u\mathrm{e}^{v}$.　　(4) $x=\cos(u+v), y=\sin(u-v)$.

用所提出的坐标变换计算下列的二重积分.

(5)

$$\iint\limits_{\substack{0\leq x-y\leq 1\\0\leq 2x+y\leq 2}} 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

令 $u = x - y, v = 2x + y$,即 $x = \frac{u+v}{3}, y = \frac{v-2u}{3}$.

(6)

$$\iint\limits_{\substack{0\leq x+2y\leq 2\\-1\leq x-3y\leq 1}} (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

令 $u = x + 2y, v = x - 3y$,即 $x = \frac{3u+2v}{5}, y = \frac{u-v}{5}$.

(7)

$$\iint\limits_{\substack{1\leq 3x-2y\leq 2\\2\leq x+3y\leq 3}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

令 $u = 3x - 2y, v = x + 3y$.

(8)

$$\iint\limits_{\substack{0\leq x-2y\leq 2\\0\leq 2x+y\leq 1}} e^{2x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(9)

$$\iint\limits_{\substack{1\leq x(1-y)\leq 3\\1\leq xy\leq 2}} 3x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

令 $x = u + v, y = \frac{v}{u+v}$. (10)

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

令 $x = 2r\cos(\theta), y = 3r\sin(\theta)$.

第二十五章的附加习题

计算函数 $f(x,y)$ 在所给区域 $\mathscr{R}$ 上的二重积分.

(1) $f(x,y) = 3x^2y - 4yx^2, \mathscr{R} = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$.

(2) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+2}}, \mathscr{R} = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$.

(3) $f(x,y) = \ln(xy) + x^2$, $\mathscr{R}$ 是由曲线 $x = 1, y = 0$ 和 $y = x^2$ 围成的区域.

(4)$f(x,y) = x^2 - xy^3$,其中 $\mathscr{R}$ 为曲线 $y = x$ 和 $y = 3x - x^2$ 围成的区域.

(5)$f(x,y) = x^2y^3$,其中 $\mathscr{R}$ 为由曲线 $xy = 1, y = x$ 和 $y = 2x, x \geqslant 0$ 围成的区域.

反转习题(6),(7),(8) 中积分的顺序. 用你的 CAS 计算这两种二重积分以验证你的答案.

(6)$\int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4 - y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

(7)$\int_{1/4}^{1}\left(\int_{x^2}^{x}\sqrt{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

(8)$\int_{0}^{\pi/2}\left(\int_{0}^{y^2}\exp\left(\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

用你的 CAS 画出下列区域 $\mathscr{R}$. 然后计算 $f(x,y)$ 在此 $\mathscr{R}$ 上的二重积分.

(9)$\mathscr{R} = \{r = 6\sin(3\theta)\}$(三瓣玫瑰),$f(x,y) = 1$.

(10)$\mathscr{R}$ 为三瓣玫瑰,$f(x,y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$.

(11)$\mathscr{R} = \{r = 7\sin(5\theta)\}$(五瓣玫瑰),$f(x,y) = x^2y$.

(12)$\mathscr{R} = \{3r = 2\cos(4\theta)\}$,$f(x,y) = \frac{x^2}{1 + y^2}$.

求下列立体的体积,用你的 CAS 得出其三维图形.

(13)$f(x,y) = 1$,其中 $x^2 + y^2 \leqslant 16$.

(14)$f(x,y) = x^4 + y^4$,其中 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$.

用你的 CAS 计算下列变换的雅可比.

(15)$x = ue^v, y = u^2 - v^2$.

(16)$x = \frac{1}{2}(u - v), y = \frac{1}{2}(u + v)$.

计算下列的二重积分.

(17)

$$\iint_{\substack{1 \leqslant x(2-y) \leqslant 4 \\ 1 \leqslant 2xy \leqslant 3}} 4y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(18)

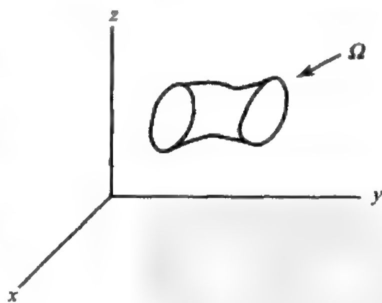
$$\iint_{\substack{0 \leqslant x-3y \leqslant 4 \\ 0 \leqslant 2x+1 \leqslant 4}} \exp(3x + 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

第二十六章　三重积分

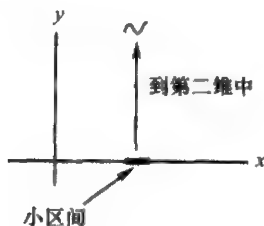
26.1　三重积分和第四个维数

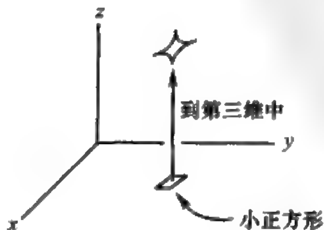
设 $w=f(x,y,z)$ 为三个变量 x,y,z 的连续函数. 设 Ω 是个三维的立体区域.

问题　我们能够实现函数 $w=f(x,y,z)$ 当 (x,y,z) 遍历(三维)区域 Ω 时的图形显示吗?



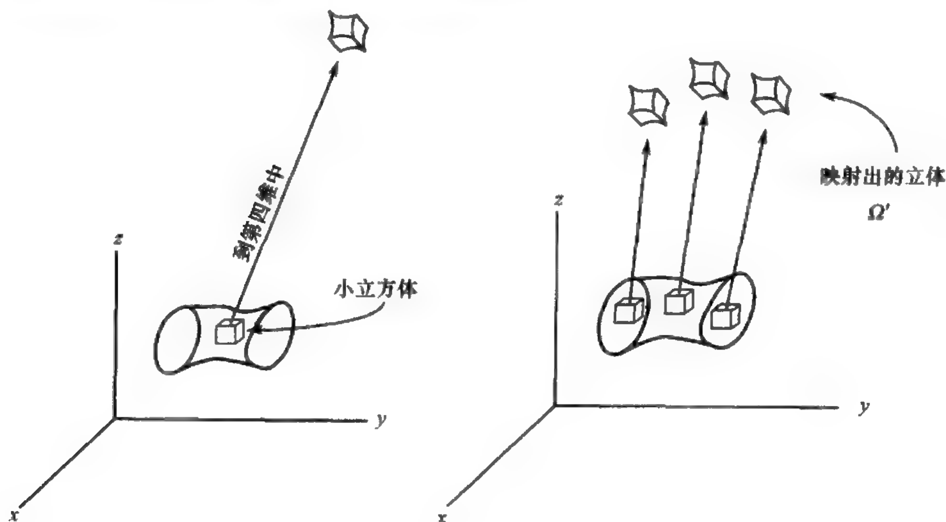
如同前面已经讨论过的那样,这个问题中提到的图形显示要求我们建立一个四维坐标系 (x,y,z,w),以四条相互垂直的直线为轴. 不幸的是,关于这点甚至连模仿着去画第四根轴都是不可能的,因而我们的讨论只能建立在生动的想像和(谨慎的)形式推广的结合上了.





暂且回到描绘在上图中的一维和二维的情形. 在定义于 x 轴上的连续函数 $y = f(x)$ 的图像中,一个小区间映成二维空间中一段小弧. 相似地,在 xy - 平面上的函数 $z = f(x,y)$ 的图像中,一个小正方形映成三维空间中一小片曲面.

现在考虑在三维空间上的连续函数 $w = f(x,y,z)$. 在这种情形,一个小的立方体被映射成一个小的三维立体区域. 这个立体区域以距离 $w = f(x,y,z)$ 被投射进了第四维. 当我们穿过立体区域 Ω 时, $w = f(x,y,z)$ 的图像显示将是一个三维的物体 Ω',它在四维空间中扭曲和翻转.



假定 $w = f(x,y,z)$ 的图像显示位于 xyz - 空间上方,即 $w = f(x,y,z) > 0$(换而言之, Ω' 被投射到 w 的正向),我们可以直观地定义

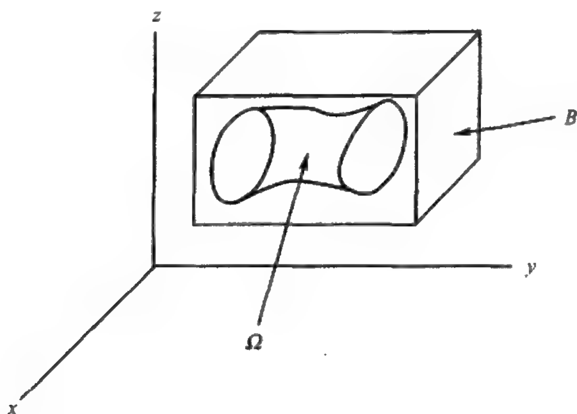
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{26.1}$$

为 Ω' 与 xyz - 空间之间的体积.

在 $f(x,y,z) = 1$ 的特殊情形,我们的三重积分则直接产生了立体 Ω 的体积 $V(\Omega)$:

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = V(\Omega). \tag{26.2}$$

$w = f(x,y,z)$ 的积分的准确定义是 §25.2 中二重积分定义的形式推广. 我们先假定 Ω **是有界的**,即存在一个长方体箱子 B 使 Ω 在 B 中.



由定义,B 有形式

$B = \{(x,y,z) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d, e \leqslant z \leqslant f\}$,而且为了区分 Ω 中的点与 Ω 外的点,我们定义(恰如我们在上一章所做过的)

$$\delta_\Omega(x,y,z) = \begin{cases} 1, 如果(x,y,z) \in \Omega \\ 0, 如果(x,y,z) \notin \Omega. \end{cases}$$

如果另外再假设 Ω 的表面不自交,我们便可定义

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \delta_\Omega(x_i,y_j,z_k) f(x_i,y_j,z_k) \cdot \frac{(b-a)(d-c)(f-e)}{N}, \tag{26.3}$$

其中 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$, $c < y_1 < y_2 < \cdots < y_N = d$,以及 $e < z_1 < z_2 < \cdots < z_N = f$ 为间隔相等的点.

当我们专注特殊情形 $\Omega = B$ 时,则 $\delta_\Omega(x,y,z)$ 只要 $(x,y,z) \in B$ 都等于1,而我们那个看起来十分麻烦的积分化成了累次的单积分,即

$$\iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \tag{26.4}$$

当然,上面的累次积分可按任何顺序计算.

例 26.1 设 $B = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 1 \leqslant y \leqslant 2, -1 \leqslant z \leqslant 0\}$. 计算

$$\iiint_B (x^2yz + ye^{x+z})\,dxdydz.$$

累次积分给了我们

$$\begin{aligned}\iiint_B (x^2yz + ye^{x+z})\,dxdydz &= \int_{-1}^0 \left(\int_1^2 \left(\int_0^1 (x^2yz + ye^{x+z})\,dx\right)dy\right)dz \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_1^2 \left(\frac{1}{3}yz + ye^z(e-1)\right)dy\right)dz \\ &= \int_{-1}^0 \frac{3}{2}\left(\frac{z}{3} + e^z(e-1)\right)dz \\ &= -\frac{1}{4} + (e-1)(1-e^{-1}).\end{aligned}$$

§ 26.1 的习题

计算下列积分. 用你的 CAS 检验你的计算.

(1) $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 xy^2z\,dxdydz$.

(2) $\int_0^1\int_{-1}^0\int_{-1}^2 (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$.

(3) $\int_{-1}^1\int_2^3\int_0^1 (x^2y+xz^3)\,dxdydz$.

(4) $\int_0^1\int_1^3\int_{-1}^1 e^x(y+z)\,dxdydz$.

(5) $\int_3^4\int_2^3\int_0^1 \frac{y^2+z}{\sqrt{x}}\,dxdydz$.

(6) $\int_0^2\int_0^1\int_{-2}^1 yz\cos(\pi xy/2)\,dxdydz$.

(7) 假设 $0 \leqslant f(x,y,z) \leqslant M$ 对在立体区域 Ω 中所有点 (x,y,z) 均成立. 证明

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz \leqslant M \cdot \text{体积}(\Omega).$$

(8) 假设 $0 \leqslant f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$ 对立体, 区域 Ω 中所有点 (x,y,z) 均成立. 证明

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz \leqslant \iiint_\Omega g(x,y,z)\,dxdydz.$$

(9) 设 $p(x,y,z) = f(x)\cdot g(y)\cdot h(z)$. 假设 $f(x)$, $g(y)$ 和 $h(z)$ 分别在区间 $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, 和 $e \leqslant z \leqslant f$ 上连续, 设 Ω 表示箱子

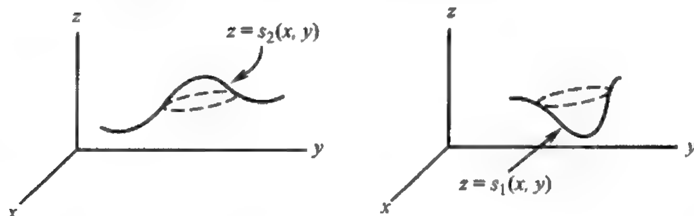
$$\Omega = \{(x,y,z) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d, e \leqslant z \leqslant f\}.$$

证明

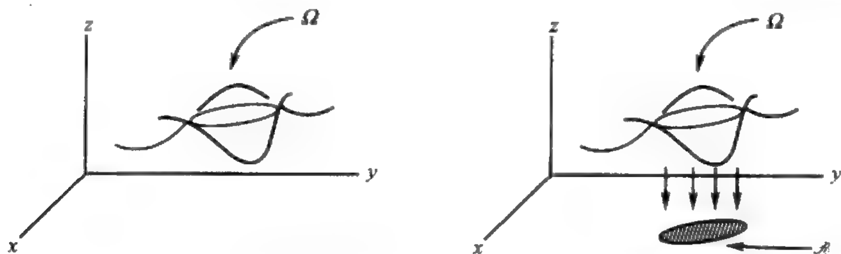
$$\iiint_\Omega p(x,y,z)\,dxdydz = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)\left(\int_e^f h(z)\,dz\right).$$

26.2　三重积分的计算

在这节我们要阐述一个积分技术，在由两个曲面 $z = s_1(x,y)$ 和 $z = s_2(x,y)$ 所围成的立体 Ω 上进行积分.



所讨论的立体可以把这两个作为边界的曲面相互叠放一起而看出来. 想像一下，一束亮光从上面平行于 z 轴的方向直接照向 Ω. Ω 的影子立刻出现在 xy - 平面上. 影子自身是 xy - 平面中一个区域 $\mathscr{R}$：它是 Ω 在 xy - 平面上的垂直投影.



每个点 $(x,y,z) \in \Omega$ 满足性质 $(x,y) \in \mathscr{R}$ 和

$$s_1(x,y) \leqslant z \leqslant s_2(x,y).$$

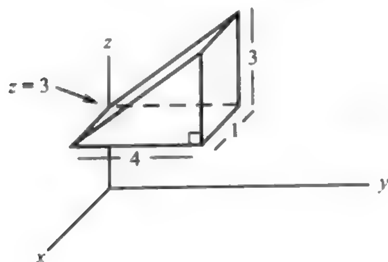
可以证明（但我们不停留于这里的细节，其论证相似于 §25.3 的那个证明）此三重积分可以先进行一个单重积分，然后再进行一个二重积分：

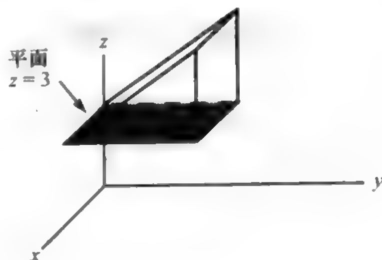
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\mathscr{R}} \left(\int_{s_1(x,y)}^{s_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{26.5}$$

例 26.2　计算积分

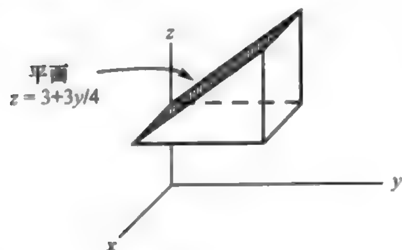
$$\iiint_{\Omega} xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

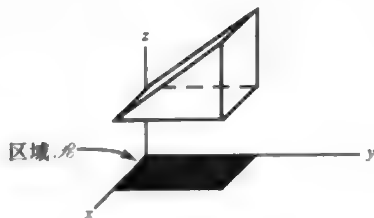
其中 Ω 为画在下面的三角楔形.





在这个问题中曲面 $z = s_1(x,y)$ 是平面 $z = 3$，而曲面 $z = s_2(x,y)$ 是通过点 $(0,0,3)$，$(1,0,3)$，$(0,4,6)$ 的平面. 这后面的平面方程可以用 §21.2 的方法得到，它是 $4z - 3y = 12$.





Ω 在 xy - 平面的垂直投影是矩形 $\mathscr{R}: 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 4$. 因此

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^4 \int_0^1 \left(\int_3^{3+\frac{3}{4}y} xz\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \int_0^1 \frac{xz^2}{2} \Bigg|_{z=3}^{z=3+\frac{3}{4}y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \int_0^1 \left(\frac{x\left(9 + \frac{9}{2}y + \frac{9}{16}y^2\right)}{2} - \frac{9}{2}x \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \left(\frac{\left(9 + \frac{9}{2}y + \frac{9}{16}y^2\right)}{4} - \frac{9}{4} \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \left(\frac{9}{8}y + \frac{9}{64}y^2 \right) \mathrm{d}y \\
&= 9 + 3 = 12.
\end{aligned}$$

注 本节中我们只注意了积分的立体由曲面$z = s_1(x,y)$和$z = s_2(x,y)$围成. 但也可能考虑立体Ω由函数

$$y = t_1(x,z), y = t_2(x,z),$$

或者

$$x = u_1(y,z), x = u_2(y,z),$$

围成的情形. 这时的连续函数$f(x,y,z)$在Ω上的三重积分分别由下面公式给出:

$$\iint_{\mathscr{R}}\left(\int_{t_1(x,z)}^{t_2(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

$$\iint_{\mathscr{R}}\left(\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{26.6}$$

其中二重积分的区域分别是Ω在xz-平面和yz-平面的垂直投影.

例 26.3 计算例 26.2 中三角楔形的面积$V(\Omega)$.

这时的积分更简单一些:

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^4\int_0^1\left(\int_3^{3+\frac{3}{4}y} 1\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^4\int_0^1\left(\frac{3}{4}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^4 \frac{3}{4}y\,\mathrm{d}y = 6. \end{aligned}$$

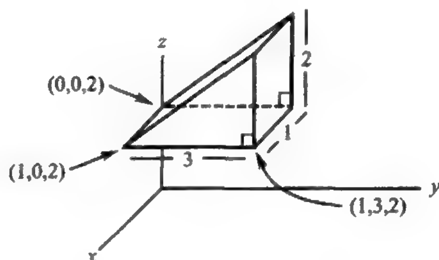
§26.2 的习题

在下面的习题中计算三重积分$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$的值. 用你的 CAS(在立体$\Omega$的图没有画在下面时)帮你画出此区域.

(1)$f(x,y,z) = (x^2 + y)\cdot z^2$,其中$\Omega$是中心在原点的单位立方体.

(2)$f(x,y,z) = (x - y)\cdot \sin z$,其中$\Omega$是长方体:$1 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant \pi$.

(3)$f(x,y,z) = 2x$,其中Ω是画在下面的三角楔.

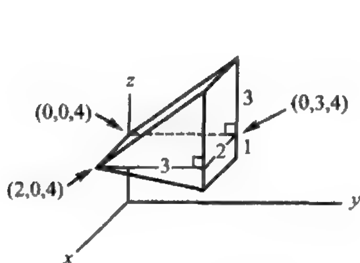


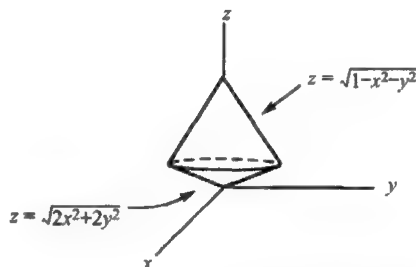
(4) $f(x,y,z)=xyz$，其中Ω是在曲面$z=x^2+1$之下而在矩形$-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$之上的立体区域.

(5) $f(x,y,z)=y+2z$，其中Ω是在曲面$z=x^2+y^2$下方而在矩形$-1\leqslant x\leqslant 2,2\leqslant y\leqslant 3$上方的立体区域.

(6) $f(x,y,z)=yz$，Ω是画在下左图的三角楔.

(7) $f(x,y,z)=2$，Ω为画在下右图的立体. 提示：证明虚线标出的圆的方程为$x^2+y^2=\frac{1}{3}$.





(8) $f(x,y,z)=3$，其中Ω是由曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-x^2-y^2$围成的立体区域.

(9) $f(x,y,z)=3$，Ω是由三个坐标平面和平面$x+y+z=1$形成的四面体.

(10) 计算在前面所有问题中立体区域Ω的体积.

26.3　三重积分的坐标变换

已知三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

设

$$x = g_1(u,v,w), y = g_2(u,v,w), z = g_3(u,v,w)$$

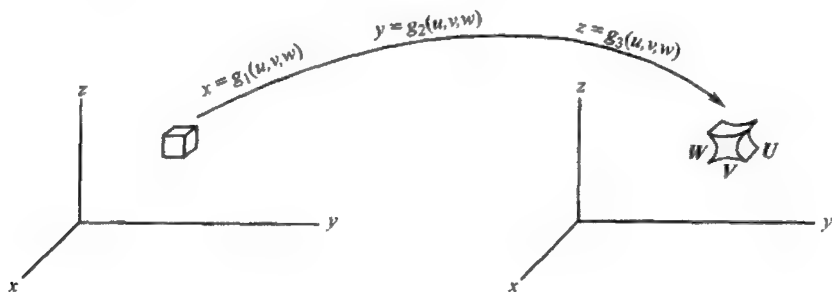
为变量变换,其中 u,v,w 是新变量,g_i 为可微的一对一函数. 回忆我们用过的在二维换元时面积元的像的近似方法(见 §25.7),我们定义

$$\boldsymbol{U} \approx \left(\frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}u,$$

$$\boldsymbol{V} \approx \left(\frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}v,$$

$$\boldsymbol{W} \approx \left(\frac{\partial x}{\partial w}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}w.$$

作为体积增量的边在变换下其像的近似值.



在新坐标系下的体积元由

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |\boldsymbol{U} \cdot (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W})| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

给出,其中

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{26.7}$$

为此变换的雅可比行列式.

在对三维换元定义了雅可比后,我们现在可以叙述换元公式了:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} f^*(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \tag{26.8}$$

其中

$$f^*(u,v,w) = f(g_1(u,v,w),g_2(u,v,w),g_3(u,v,w)),$$

而 Ω' 是那些点 (u,v,w) 的集合，它们满足

$$(g_1(u,v,w),g_2(u,v,w),g_3(u,v,w)) \in \Omega.$$

在所给情形中确定哪种换元方便是很微妙的. 在二重积分情形我们发现，在积分区域容易被极坐标描述时，使用极坐标是适宜的. 一般说来，在换元时，我们的目的是要得到一个多少更容易积分的区域(从而希望能完成计算). 在下一节我们介绍两个最重要的换元：柱面坐标和球面坐标.

§26.3 的习题

用你的 CAS 计算下列三维换元的雅可比.

(1) $x = u + v + w, y = u - v + 2w, z = 2u + v - 3w.$

(2) $x = -3u + v - 2w, y = u + 5v - 2w, z = -2u - 3v + 4w.$

(3) $x = a_1u + b_1v + c_1w, y = a_2u + b_2v + c_2w, z = a_3u + b_3v + c_3w.$

(4) $x = u^2 + v^2, y = v^2 - w^2, z = uvw.$ (5) $x = u + v, y = uw^2, z = w - v.$

用所建议的换元计算下列积分.

(6) 令 $x = 2u, y = 5v, z = 3w$ 于

$$\iiint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}\leqslant 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(7) 设 Ω 为 $\{0 \leqslant x, y \leqslant 2, 0 \leqslant x + y + z \leqslant 1\}$ 定义的立体. 令 $u = x + y + z, v = x, w = y$ (即 $x = v, y = w, z = u - v - w$) 于 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

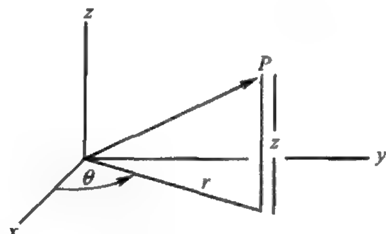
(8) 设 Ω 由 $\{-1 \leqslant z \leqslant 0, 0 \leqslant x + 2y \leqslant 1, 1 \leqslant 2x + y - z \leqslant 2\}$ 定义的立体. 令 $u = 2x + y - z, v = x + 2y, w = z$ $\left(\text{即 } x = \frac{2u + 2w - v}{3}, y = \frac{2v - u - w}{3}, z = w\right)$ 于三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

26.4 柱面坐标和球面坐标

在 §21.4 中柱面坐标

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), z = z$$

是作为极坐标到三维空间的自然推广而被引进的. 回忆每个点 $p = (x,y,z)$ 可以作为点 (r,θ,z) 在柱面坐标中实现.



这个换元的雅可比$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}$容易算出：

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0\\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \tag{26.9}$$

$$=r(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))=r.$$

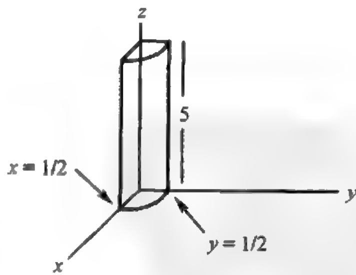
因此方程(26.8)变为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'} f^*(r,\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{26.10}$$

其中$f^*(r,\theta,z)=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta),z)$.

例 26.4 计算积分

$$\iiint_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$



其中Ω为半径$\frac{1}{2}$，高5的四分之一圆柱，画于右图.

由于我们正在上面进行积分的区域自身是圆柱的一部分，它很容易用柱面坐标来描述（正如人们预料的那样）：Ω'由点(r,θ,z)：$0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$和$0\leqslant z\leqslant 5$组成.

因此我们有

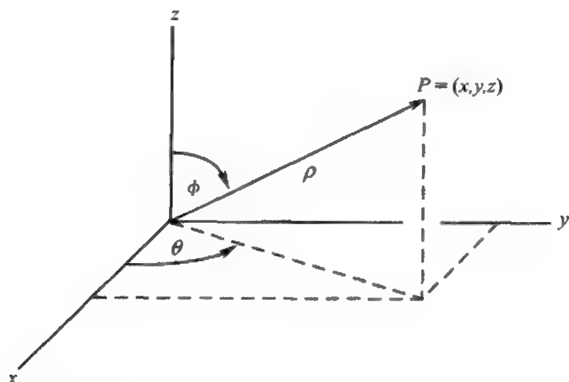
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} r(\cos(\theta))z\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta)) z \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_{r=0}^{r=\frac{1}{2}} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^5 z \cdot \sin(\theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{24} \frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=5} = \frac{25}{48}.$$

球面坐标　每个点 $P = (x, y, z)$ 可以由两个角和一个距离 (ρ, ϕ, θ) 具体指定，其中 $0 \leqslant \rho, 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ 和 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.



我们称之为**球面坐标**的这个表示的准确公式是

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin(\phi) \cos(\theta), \\ y &= \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \\ x &= \rho \cos(\phi). \end{aligned} \tag{26.11}$$

为了使用球面坐标给出的曲面能形象地被看清，我们一般必须做某些处理以将其化到直角坐标形式. 等式

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos(\phi) &= \frac{z}{\rho}, \\ \sin(\phi) &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\rho}, \\ \cos(\theta) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned} \tag{26.12}$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

是非常有用的转换.

例 26.5 辨认由球面坐标给出的曲面 $\rho = \cos(\phi)$.

由定义,

$$\rho = \cos(\phi) = \frac{z}{\rho},$$

另外

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

我们最后有

$$x^2 + y^2 + z^2 = z,$$

配完全平方,有

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

看得出我们的曲面是半径为 2,中心在(0,0,1) 的球面.

例 26.6 计算球面坐标变换的雅可比$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}$.

由定义,雅可比由那些有点麻烦的导数给出:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi) \\ \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & \rho\cos(\phi)\sin(\theta) & -\rho\sin(\phi) \\ -\rho\sin(\phi)\sin(\theta) & \rho\sin(\phi)\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \rho^2\sin(\phi). \end{aligned} \tag{26.13}$$

我们把某些细节留作习题.

例 26.6 中的计算让我们能够以球面坐标写下 26.8 的换元公式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f^*(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin(\phi)\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta. \tag{26.14}$$

例 26.7(球的体积)　计算半径为 R 的球的体积.

半径为 R 的立体球(中心在原点)由点

$$\Omega_R = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R\}.$$

组成. 在这种情形中球面坐标完全是自然的:

$$\Omega_R = \{(\rho,\phi,\theta) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

应用方程(26.14),我们得到这个体积的经典公式,

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\rho^2\sin(\phi)\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{4\pi R^3}{3}.\end{aligned}$$

§26.4 的习题

(1) 利用柱面坐标计算积分

$$\iiint_{\substack{1\leq x^2+y^2\leq 4\\ 2\leq z\leq 3}} x^2 z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(2) 令 $x = x, y = r\cos(\theta), z = r\sin(\theta)$ 计算积分

$$\iiint_{\substack{0\leq y^2+z^2\leq 1\\ -1\leq x\leq 1}} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(3) 转换为球面坐标计算积分

$$\iiint_{1\leq x^2+y^2+z^2\leq 2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(4) 转换为球面坐标计算积分

$$\iiint_{1\leq x^2+y^2+z^2\leq 2} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

识别下列由柱面坐标给出的曲面. 用 CAS 作图以检验你的答案.

(5) $r = 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2.$

(6) $r = 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq z \leq 0.$

(7) $r(\cos(\theta) + \sin(\theta)) + z = 1.$

(8) $r^2 = z, 0 \leq z \leq 4.$

(9) $r^2 = z, -1 \leq z \leq 1.$

(10) $r\cos(\theta) = 1.$

识别下列由球面坐标给出的曲面. 用 CAS 作图以检验你的答案.

(11) $\rho = 1, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

(12) $\rho = 3, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$

(13) $0 \leqslant \rho \leqslant 1, \phi = \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

(14) $0 \leqslant \rho \leqslant 1, \phi \leqslant \frac{3\pi}{4}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

(15) $\rho = \frac{1}{\cos(\phi)}$.

(16) $\rho = 2\cos(\phi)$.

第二十六章的附加习题

计算下列积分. 用你的 CAS 检验你的计算.

(1) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\int_{-1}^{1} x\frac{\cos^2(\pi zy)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(2) $\int_{1}^{3}\int_{x}^{x^2}\int_{0}^{\ln(x)} xe^y\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

(3) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{1}^{e^y} z\cdot\ln(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

在下面习题中求立体区域 Ω 的体积. 用你的 CAS 帮助描绘出这些立体区域.

(4) Ω 是由 $2x^2+2z^2=1$, 平面 $y=x$ 和 $x=0$ 在第一卦限围成的楔形.

(5) Ω 是由抛物面 $z=4x^2+4y^2$ 和 $z=6-7x^2-y^2$ 围成的立体区域.

(6) Ω 是由抛物面 $z=4x^2+y^2$ 和 $z=4-3y^2$ 围成的立体区域.

(7) Ω 是由抛物面 $z=9-x^2-y^2$ 和 $z=0$ 围成的立体. **提示**: 用柱面坐标.

(8) Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=10$ 包围的立体. **提示**: 用柱面坐标.

(9) Ω 是由曲面 $\gamma^2+2z^2=20$ 和曲面 $z=r^2$ 围成的立体, 其中 $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}$. **提示**: 用柱面坐标.

(10) Ω 是圆锥 $\gamma=\frac{5}{a}$ 和 $z=5$ 围成的立体, 其中 $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}$.

(11) Ω 是由球面 $\rho=4$, 坐标平面和锥 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 和锥 $\frac{\pi}{3}$ 在第一象限围成的立体. **提示**: 用球面坐标.

(12) Ω 是由球 $\rho=4a^2$ 和平面 $z=-1$ 和 $z=a$ 围成的立体. 一个立体区域 Ω 的形心是 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 其中

$$\bar{x}=\frac{1}{\text{体积}(\Omega)}\iint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{26.15}$$

$$\bar{y}=\frac{1}{\text{体积}(\Omega)}\iint_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{26.16}$$

$$\bar{z}=\frac{1}{\text{体积}(\Omega)}\iint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{26.17}$$

粗略地说, 如果立体区域 Ω 有均匀分布的质量, 那么可以在此形心"平衡"此立体. 求所给区域 Ω 的形心.

用你的 CAS 画出立体并点出形心.

(13) Ω 是由抛物面 $z=4x^2+4y^2$, $z=6-7x^2-y^2$ 包围的立体区域.

(14) Ω 是由抛物面 $z=9-x^2-y^2$ 和 $z=0$ 围成的立体. **提示**: 用柱面坐标.

(15) Ω是由球$\rho = 4$,坐标平面和锥$\varphi = \frac{\pi}{4}$,锥$\varphi = \frac{\pi}{3}$在第一卦限围成的立体. 提示:用球面坐标.

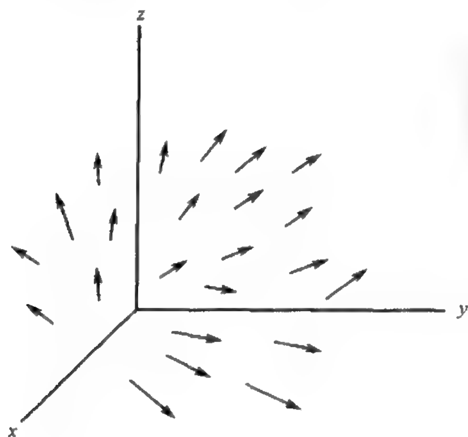
(16) Ω是由曲面$r^2 + 2z^2 = 20$和曲面$z = r^2$围成的立体. 提示:用柱面坐标.

(17) Ω是由圆锥$z = \frac{h}{a}r$和$z = h$围成的立体区域.

第二十七章　向量场和曲线积分

27.1　向量场

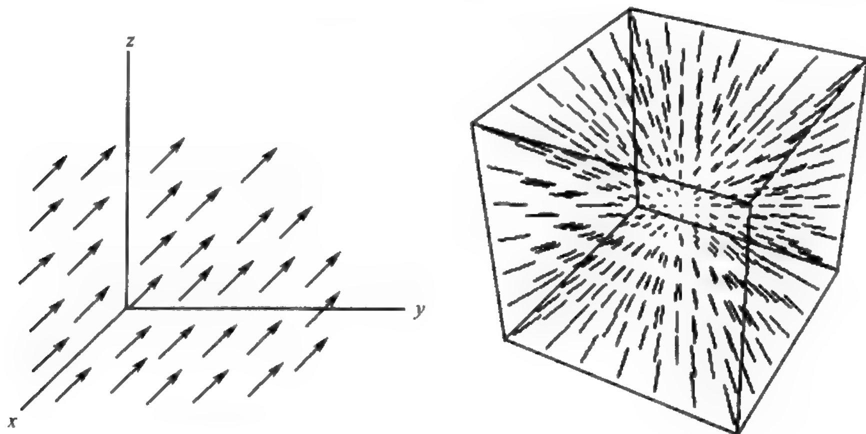
向量场是在三维空间上的一个向量函数,即一个向量场对三维空间中每个点(x,y,z)指定了一个唯一的向量$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{f}(x,y,z)$. 向量场的图像显示从形象上看常常具有戏剧性效果. 像在下面的图例中所看到的那样,这个向量场的显示给予观察者一种动态的感觉或者一种自然力的感觉.



为了发展对这些函数的一些直觉，我们需要观察某些例题.

例 27.1（常向量场）　设 $f(x,y,z) = i + j + k$. 由于 $f(x,y,z)$ 与所涉及的点无关，所有向量都相同，等于 $i + j + k$. 此向量场显示于下左图.

例 27.2（位置向量场）　考虑向量场 $f(x,y,z) = xi + yj + zk$. 可以观察到当我们从原点出走时向量变得越来越大，而且向量从原点指向外.



例 27.3　在向量场

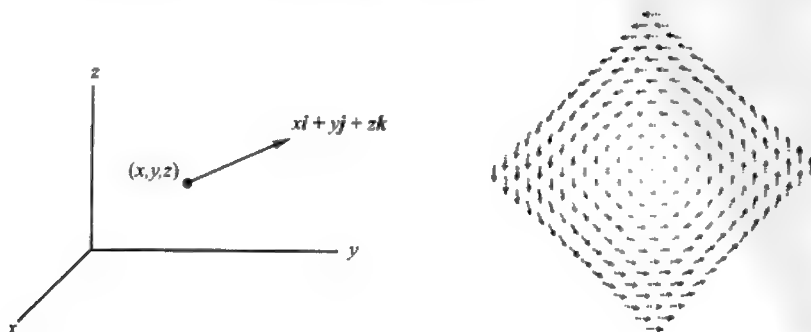
$$f(x,y,z) = \frac{(xi + yj + zk)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (x,y,z) \neq (0,0,0),$$

的情形中，所有向量具有单位长度（即长度 1）并从原点指向外.

回到位置向量场

$$f(x,y,z) = xi + yj + zk,$$

关注一下某个特定点 (x,y,z) 及其位置向量 $xi + yj + zk$（画于下左图）



现在考虑位于 xy - 平面中的向量 $-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$. 由于点积

$$(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})\cdot(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=0.$$

我们推断这两个向量是垂直的. 当我们(在 xy - 平面)显示这个新向量场时

$$\boldsymbol{g}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$$

可以看到一个清楚的旋转(见上右图). 这是自旋向量场的例子.

一般说来,设想出向量场的图像显示是困难的. 即便在迄今所考虑的简单例子中,其行为也有实质性的变化. 然而也有一类叫做**梯度向量场**的重要向量场,其图像显示已得到充分了解并将在此节后面部分进行讨论.

回想一个可微函数 $\phi=\phi(x,y,z)$ 的**梯度**(见 §23.3)由下式给出:

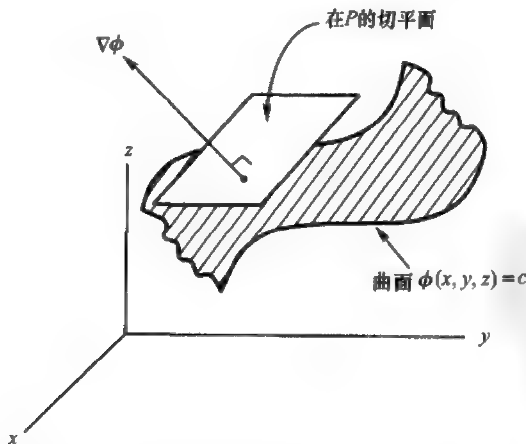
$$\nabla\phi(x,y,z):=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

定义 一个向量场 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{f}(x,y,z)$ 是个**梯度向量场**是说,如果存在一个可微函数 $\phi(x,y,z)$ 使得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{f}(x,y,z)=\nabla\phi(x,y,z).$$

我们称 ϕ 是 $\boldsymbol{f}$ 的一个**位势函数**.

在命题24.18的证明过程中我们曾看到,向量 $\nabla\phi$ 垂直于等高面 $\phi(x,y,z)=c$,即在点 $P=(x_0,y_0,z_0)$, $\nabla\phi(x_0,y_0,z_0)$ 垂直于曲面 $\phi(x,y,z)=c$ 在 P 点的切平面.



当我们把 $\nabla\phi$ 看成是一个向量场时,其图像显示可以容易地(利用上面的观察)被描述.

推论27.4 设 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi(x,y,z)$ 为一位势函数为 ϕ 的梯度向量场. $\nabla\phi$ 的图

像显式由那些垂直于等高面

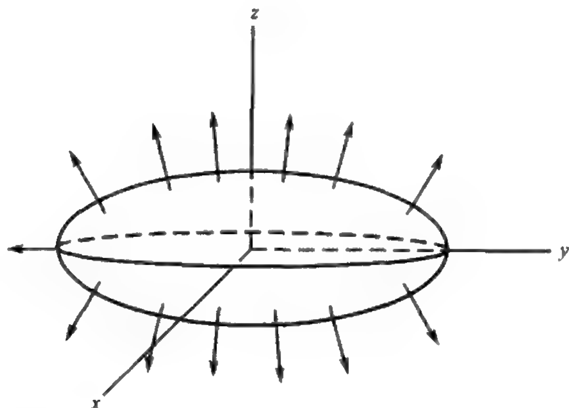
$$\phi(x,y,z) = c$$

的向量组成，其中常数 c 在实数上变化.

例 27.5（椭球面）　设 d,e,f 为常数. 曲面

$$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{e^2} + \frac{z^2}{f^2} = 1$$

是一个椭球面.



它在三个坐标轴上的截距分别在点

$$(\pm d,0,0),(0,\pm e,0),(0,0,\pm f).$$

向量场

$$\begin{aligned} v &= \nabla\left(\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{e^2} + \frac{z^2}{f^2}\right) \\ &= \frac{2x}{d^2}i + \frac{2y}{e^2}j + \frac{2z}{f^2}k \end{aligned}$$

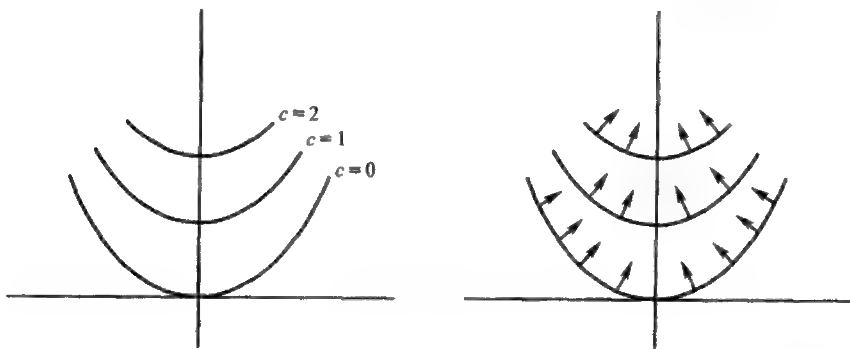
的图像显示由垂直于椭球面

$$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{e^2} + \frac{z^2}{f^2} = c$$

的向量组成，而 c 遍历所有的正实数.

在下一个例子中，我们将考察推论 27.4 在二维空间的一个例子.

例 27.6（抛物线位势）　设 $\phi(x,y) = y - x^2$. 曲线 $\phi(x,y) = c$ 是容易描画的抛物线 $y = x^2 + c$.



梯度向量场$\boldsymbol{v} = \nabla\phi = -2x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$的图像显示为所有垂直于等高线$y - x^2 = c$的向量.

我们成功地描述这类向量场的图像显示自然引出的问题是:

问题 已知一个二维或三维的向量场$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(x,y,z)$,我们如何确定它是不是一个梯度向量场?

先讨论二维情形,这不算太复杂. 由定义,$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(x,y)$ 有形式

$$\boldsymbol{v} = f_1(x,y)\boldsymbol{i} + f_2(x,y)\boldsymbol{j}.$$

如果$\boldsymbol{v}$实际上是个梯度向量场,则存在位势函数$\phi(x,y)$使得$\boldsymbol{v} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}$.
因此我们可以推断

$$\begin{cases} f_1(x,y) = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}, \\ f_2(x,y) = \dfrac{\partial\phi}{\partial y}. \end{cases} \tag{27.1}$$

回想混合的偏导数总是相等的(见 §23.3),那么微分(27.1),我们看到

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}. \tag{27.2}$$

条件(27.2) 提供了了解$\boldsymbol{v}$是否是梯度向量场的一个漂亮的判别法. 可以证明,当假定我们是在**单连通区域**上讨论时,(27.2) 是$\boldsymbol{v}$为梯度向量场的充分必要条件.(由定义,一个区域$\mathscr{R}$是单连通的是说,如果$\mathscr{R}$中的任何一条闭曲线在不离开$\mathscr{R}$的条件下可收缩成一个点.)更进一步说,为了解出位势函数ϕ,我们只需对(27.1) 做关于x的积分,然后再做关于y的微分.

例 27.7　证明$\boldsymbol{v} = y^3\boldsymbol{i} + 3xy^2\boldsymbol{j}$是个梯度向量场并求其位势函数 ϕ.

此例题中方程(27.2) 容易验证.

$$\frac{\partial}{\partial y}y^3 = \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2),$$

从而推断出$\boldsymbol{v}$是个梯度向量场. 要算出一个位势函数我们先处理方程(27.1)

$$y^3 = \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

两边取关于 x 的积分产生出

$$\phi(x,y) = \int \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x = \int y^3 \mathrm{d}x = y^3 x + C(y),$$

其中 $C(y)$ 是只包含 y 的函数. 取关于 y 的微分我们便有

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3xy^2 + C'(y).$$

再次应用(27.1),我们有

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3xy^2,$$

从而有 $C'(y) = 0$,因此 $C(y) = C_1$ 是个常数,于是

$$\phi(x,y) = y^3 x + C_1$$

是我们所需要的位势函数.

例 27.8　$\boldsymbol{v} = y^4\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$ 是个梯度向量场吗?

此例题中的向量场由于不满足条件(27.2),即

$$\frac{\partial}{\partial y}y^4 \neq \frac{\partial}{\partial x}(2xy),$$

故不可能是个梯度向量场.

我们现在转向寻找使三维向量场是梯度向量场的条件. 考虑三维向量场

$$\boldsymbol{v} = f_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + f_2(x,y,z)\boldsymbol{j} + f_3(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中f_1,f_2,f_3 为可微函数. 如果位势函数 $\phi(x,y,z)$ 存在,则再由定义,我们有等式

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = f_1, \frac{\partial \phi}{\partial y} = f_2, \frac{\partial \phi}{\partial z} = f_3.$$

当我们进一步取导数(并假定我们的区域是单连通的) 时,我们得到了充分必要条件:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} = \dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} = \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial y}. \end{cases} \tag{27.3}$$

例 27.9 $\boldsymbol{v} = 2xyz\boldsymbol{i} + x^2z\boldsymbol{j} + x^2y\boldsymbol{k}$ 是个梯度向量场吗?

经验证方程(27.3)可知此问题的答案是肯定的.

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xyz) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2z),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(2xyz) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(x^2z) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y).$$

方程(27.3)不容易被记住而且似乎也不特别自然. 为了弥补这些不足,我们将引进(但不是非常正式地) **在函数集合上的算子**的概念.

一个**算子**从根本上说是一个函数,它的定义域和值域自身都是函数的(可能是实的,向量的等等)集合. 我们已经见过一个重要的算子的例子:作用于单变实可微函数集合上的导数. 有大量的出现在各种场合的算子的例子. 在这里,我们将考虑**梯度**算子,记为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

按定义,梯度算子对(三维空间的)可微实函数 $\psi(x,y,z)$ 取值为它们的梯度(它是个三维向量),

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

当把梯度算子看成是一个向量时,我们可定义一个向量

$$\boldsymbol{v} = f_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + f_2(x,y,z)\boldsymbol{j} + f_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

的**旋度**为

$$\mathrm{curl}(\boldsymbol{v}) = \nabla \times \boldsymbol{v}.$$

用显式表示,此旋度由下式给出:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

迅速的审视便可指出,(27.3) 成立当且仅当

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{v}) = 0. \tag{27.4}$$

更进一层说,可以证明如果$\boldsymbol{v}$为向量场且在一单连通的三维区域(其定义类比于二维的情形)中 $\operatorname{curl}(\boldsymbol{v}) = 0$,则$\boldsymbol{v}$必定是一个梯度向量场.

例 27.10 求例 27.9 中梯度向量场$\boldsymbol{v} = 2xyz\boldsymbol{i} + x^2z\boldsymbol{j} + x^2y\boldsymbol{k}$ 的位势函数 $\phi(x,y,z)$.

简单的计算验证了(27.4) 成立:

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{vmatrix} = 0.$$

我们现在集中力量求 ϕ. 从已知的$\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2xyz$ 着手,从而

$$\phi(x,y,z) = x^2yz + C(y,z),$$

其中 $C(y,z)$ 为只依赖于 y,z 的函数. 第二步我们利用等式$\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x^2z$ 有

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2z = x^2z + \frac{\partial}{\partial y}C(y,z).$$

这意味着$\dfrac{\partial}{\partial y}C(y,z) = 0$,故 $C(y,z) = C(z)$ 实际只是 z 的函数. 最后$\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = x^2y$,有

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = x^2y = x^2y + C'(z).$$

故 $C'(z) = 0$,必然 $C(z) = C$(常数). 概括起来,我们已找到了想要的位势函数

$$\phi(x,y,z) = x^2yz + C.$$

§27.1 的习题

用你的 CAS 得出下列向量场的图像显示. 如果你的 CAS 没有这个功能,则简单地画出几个代表向量来模拟此向量场的图像显示.

(1) $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{j}$. (2) $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$. (3) $\boldsymbol{v} = -2x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. (4) $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

(5) $\boldsymbol{v} = (z - y)\boldsymbol{i} + (x - z)\boldsymbol{j} + (y - x)\boldsymbol{k}$.

(6) $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$,其中 $\phi(x,y) = y - x^2, y - x^3$,和 $y - \sin(x)$.

(7) $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$,其中 $\phi(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$.

(8) $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$,其中 $\phi(x,y,z) = x - y + z$.

在下面的习题中确定$\boldsymbol{v}$是否是个梯度向量场,如果是的则求它的位势函数 ϕ.

(9) $\boldsymbol{v} = y^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$. (10) $\boldsymbol{v} = 3x^2y\boldsymbol{i} + 2x^3\boldsymbol{j}$.

(11) $\boldsymbol{v} = 6x\boldsymbol{i} - 4y\boldsymbol{j}$. (12) $\boldsymbol{v} = y\cos(xy)\boldsymbol{i} + x\cos(xy)\boldsymbol{j}$.

(13) $\boldsymbol{v} = y^2\boldsymbol{i} + 3xy\boldsymbol{j}$. (14) $\boldsymbol{v} = \frac{y^2}{x}\boldsymbol{i} + 2y\ln(x)\boldsymbol{j}$.

(15) $\boldsymbol{v} = yz\boldsymbol{i} + 2xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$. (16) $\boldsymbol{v} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$.

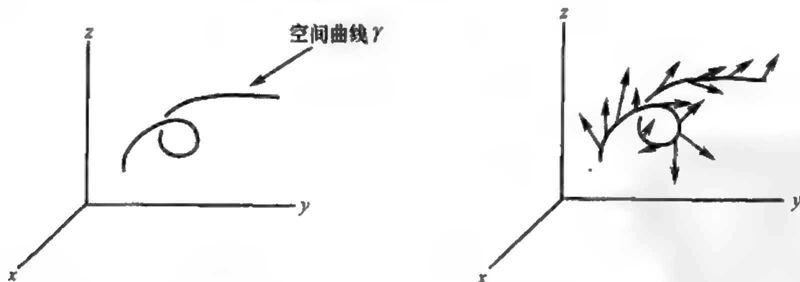
(17) $\boldsymbol{v} = 2x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$. (18) $\boldsymbol{v} = (\cos(x))y^2z\boldsymbol{i} + 2(\sin(x))yz\boldsymbol{j} + (\sin(x))y^2\boldsymbol{k}$.

27.2 曲线积分

设 $\gamma(t) = \gamma_1(t)\boldsymbol{i} + \gamma_2(t)\boldsymbol{j} + \gamma_3(t)\boldsymbol{k}$ 为一空间曲线的参数化. 从几何的观点看,此曲线由点

$$\gamma = \{\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

组成.

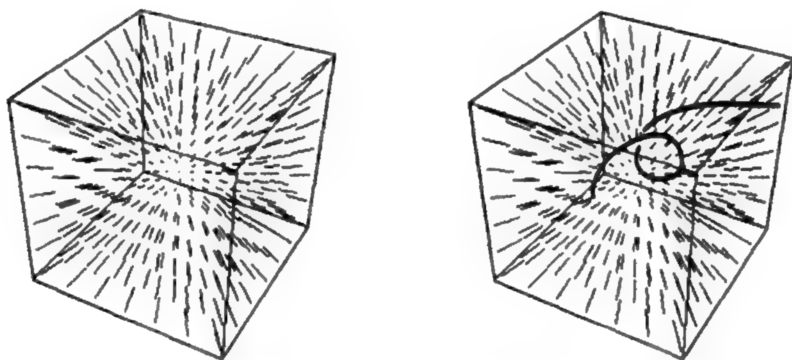


现在考虑一个任意的向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$,并将其限制于我们的空间曲线 γ,即向量

$$\boldsymbol{F}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

的集合,其中 t 遍历实数集. 这些向量的图像显示类似于上右图,其中沿此曲线出现的向量是由向量场 $\boldsymbol{F}$ 诱导的(而且一般说,并不切于此曲线).

构造此显示的一个好办法是首先考虑向量场 $\boldsymbol{F}$ 自己的图像显示，然后再嵌入空间曲线 $\boldsymbol{\gamma}$.



例 27.11（风）　设 γ 表示一架小飞机飞行的航线. 我们可以把风想成是个向量场，它在空间中每点指定了一个力. 风的向量场在曲线 γ 上的限制，给出了当飞机在大气中飞行时施于它的风力的形象化表示.

设

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

为位置向量. 如果我们将 $\boldsymbol{r}$ 限制于一条空间曲线

$$\gamma = \{(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

我们得到

$$\boldsymbol{r}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = \gamma_1(t)\boldsymbol{i} + \gamma_2(t)\boldsymbol{j} + \gamma_3(t)\boldsymbol{k}.$$

为了简化叙述，我们将使用下面的记号：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \boldsymbol{F}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)),\\ \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \gamma_1(t)\boldsymbol{i} + \gamma_2(t)\boldsymbol{j} + \gamma_3(t)\boldsymbol{k},\\ \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k},\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\gamma}(t))}{\mathrm{d}t} = \gamma'_1(t)\boldsymbol{i} + \gamma'_2(t)\boldsymbol{j} + \gamma'_3(t)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\gamma}'(t).\end{gathered} \tag{27.5}$$

定义　设 $\boldsymbol{F} = f_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + f_2(x,y,z)\boldsymbol{j} + f_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 为一连续向量场（即函数 f_1, f_2, f_3 连续），且设 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ 为在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的可微空间曲线. $\boldsymbol{F}$ **在 $\boldsymbol{\gamma}$ 上的曲线积分**被定义为

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)\mathrm{d}t. \tag{27.6}$$

注　功的物理概念让我们将曲线积分的形式定义翻译成了更为直观的词

条. 按定义,功是力乘以移动的距离. 因此,如果 $\boldsymbol{F}$ 是个力场,则曲线积分

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

代表了当一质点被向量场 $\boldsymbol{F}$ 的力沿曲线 γ 推动时所做的总的功.

为了显式地计算曲线积分,假定 $\boldsymbol{F}$ 有形式

$$\boldsymbol{F}=f_1(x,y,z)\boldsymbol{i}+f_2(x,y,z)\boldsymbol{j}+f_3(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

以及 $\gamma=(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))$,则

$$\begin{aligned}\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\int_\gamma(f_1(x,y,z)\mathrm{d}x+f_2(x,y,z)\mathrm{d}y+f_3(x,y,z)\mathrm{d}z)\\&=\int_a^b(f_1(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))\gamma'_1(t)+f_2(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))\gamma'_2(t)\\&\quad+f_3(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))\gamma'_3(t))\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{27.7}$$

例 27.12 设 $\boldsymbol{F}=xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ 为一向量场. 计算沿空间曲线 $\gamma=(1,t,t^2)$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 的 $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

在此例中 $\gamma_1(t)=1,\gamma_2(t)=t,\gamma_3(t)=t^2$. 因此 $\gamma'_1(t)=0,\gamma'_2(t)=1$, $\gamma'_3(t)=2t$, 以及

$$\begin{aligned}\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\int_0^1(1\cdot t^2\gamma'_1(t)+t\cdot t^2\gamma'_2(t)+1\gamma'_3(t))\mathrm{d}t\\&=\int_0^1(t^3+2t)\mathrm{d}t=\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

例 27.13 设抛物线 γ 的方程为(xy - 平面中)$y=x^2,0\leqslant x\leqslant 2$. 计算沿 γ 的积分

$$\int_\gamma x^3yz\mathrm{d}x+y^2x\mathrm{d}y+2xz\mathrm{d}z.$$

我们首先将 γ 参数化以着手解这最后一个例题:

$$\gamma(t)=(t,t^2,0).$$

因为 $x=\gamma_1(t)=t,y=\gamma_2(t)=t^2,z=\gamma_3(t)=0$,我们看出 $\mathrm{d}x=\gamma'_1(t)\mathrm{d}t=1\mathrm{d}t,\mathrm{d}y=\gamma'_2(t)\mathrm{d}t=2t\mathrm{d}t,\mathrm{d}z=\gamma'_3(t)\mathrm{d}t=0$. 从而

$$\int_\gamma x^3yz\mathrm{d}x+y^2x\mathrm{d}y+2xz\mathrm{d}z=\int_0^2 t^5\cdot 2t\mathrm{d}t=\frac{256}{7}.$$

§ 27.2 的习题

用你的 CAS 计算下列曲线积分$\int_{\gamma} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$. 画出每个情形中的空间曲线 γ.

(1)$\boldsymbol{F} = x^2y\boldsymbol{i} + 2xyz\boldsymbol{k}$, $\gamma(t) = (-1, t, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

(2)$\boldsymbol{F} = x^2y\boldsymbol{i} + 2xyz\boldsymbol{k}$, $\gamma(t)$ 为抛物线 $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ 而且它在平面 $z = 1$ 上.

(3)$\boldsymbol{F} = 3xz\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + 2yz\boldsymbol{k}$, $\gamma(t) = (t, t, t)$, $1 \leqslant t \leqslant 2$.

(4)$\boldsymbol{F} = 3xz\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + 2yz\boldsymbol{k}$, γ 是在平面 $x = 3$ 上对 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 的抛物线 $z = 2y^2$.

(5)$\boldsymbol{F} = y\sqrt{x}\boldsymbol{i} - z\sqrt{y}\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$, $\gamma(t) = (1, t^3, 5)$, $0 \leqslant t \leqslant 4$.

(6) $\boldsymbol{F} = 3xz\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + 2yz\boldsymbol{k}$, 其中 γ 是一个正方形的边界, 此正方形位于 xy - 平面中, 中心在原点而边长为 1.

(7) 计算$\int_{\gamma}(3x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y)$, 其中 γ 为 xy - 平面中联结点(1,3) 和(-2,4) 的线段.

(8) 计算$\int_{\gamma}(2xy\mathrm{d}x + 3x^2y^3\mathrm{d}y - xz\mathrm{d}z)$, 其中 γ 为联结点(1, -1,0) 和(0,2, -1) 的线段.

(9) 设 $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$. 画出向量场 $\boldsymbol{F}$ 并求力场 $\boldsymbol{F}$ 对质点沿抛物线 $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$. 运动时所做的功.

(10) 设 $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$. 求力场 $\boldsymbol{F}$ 对绕 xy - 平面中单位圆(顺时针或反时针方向) 的动点所做的功.

(11) 设 $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$. 作向量场 $\boldsymbol{F}$ 的图, 并求在 $\boldsymbol{F}$ 作用下绕 xy - 平面上单位圆一周的动点所做的功.

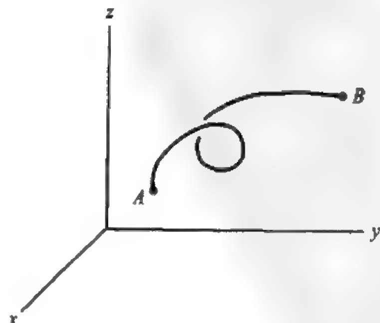
(12) 设 $\boldsymbol{F} = 2xyz\boldsymbol{i} + x^2z\boldsymbol{j} + x^2y\boldsymbol{k}$. 求在 $\boldsymbol{F}$ 作用下一个绕圆$(5, \cos(t), \sin(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 的动点所做的功.

27.3　路径的无关性

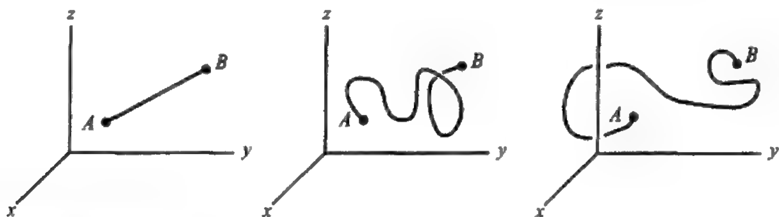
设 $\boldsymbol{F}$ 为一连续向量场, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 为位置向量场. 假定

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

为区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上一条光滑的空间曲线, 它联结了点 $A = \gamma(a)$ 和 $B = \gamma(b)$.



因为有联结 A 和 B 的许多条可能的空间曲线, 例如



自然要问下面的问题.

问题 假设点 A,B 固定,曲线积分

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

是否依赖于联结 A 和 B 的路径 γ?

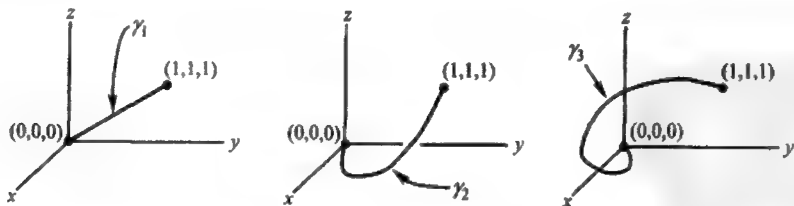
对此问题的一个切合实际的处理是考虑一个特定的向量场 $\boldsymbol{F}$ 和几条指定的曲线.

例 27.14 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. 比较曲线积分

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \int_{\gamma_3} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 γ_1 为$(0,0,0)$ 和$(1,1,1)$ 之间的直线,$\gamma_2(t) = (t,t^3,t^2), 0 \leqslant t \leqslant 1$,而 $\gamma_3(t) = \left(t, \sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right), t\right), 0 \leqslant t \leqslant 1$.

如同我们在下图所看到的那样,上面所定义的所有空间曲线均联结点$(0,0,0)$ 和$(1,1,1)$.



在第一条曲线 $x = t, y = t, z = t$ 的情形,有 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}z = \mathrm{d}t$,从而

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_1} (2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$$

$$= \int_0^1 (2t^2 + t^2 + 1)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (1 + 3t^2)\mathrm{d}t = 2.$$

在 γ_2 上，我们有 $x = t, y = t^3, z = t^2$，因此 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t, \mathrm{d}y = 3t^2\mathrm{d}t, \mathrm{d}z = 2t\mathrm{d}t$，从而

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\gamma_2} 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + \mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 (2t^4 + 3t^4 + 2t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + 1 = 2.\end{aligned}$$

最后当我们在 γ_3 上积分时，$x = t, y = \sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right), z = t$. 因此我们有 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}z = \mathrm{d}t$，

$\mathrm{d}y = \frac{5\pi}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t$，从而

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\gamma_3} 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + \mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \left(2t\sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right) + \frac{5\pi}{2}t^2\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right) + 1\right)\mathrm{d}t \\ &= 2.\end{aligned}$$

这个例题提示了曲线积分 $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 不依赖于路径 γ. 一般情形也对吗？下一个例题表明此问题颇为微妙.

例 27.15　设 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. 比较曲线积分

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \quad \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 γ_1, γ_2 是例 27.14 中的.

这个例题与前面一个相差非常细微，但在取积分

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^1 (2t^2 + 1)\mathrm{d}t = \frac{5}{3},$$

$$\int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^1 (4t^4 + 2t)\mathrm{d}t = \frac{9}{5},$$

后，我们看到一个非常不同的表现.

这两个似乎相似的例题间的差异在下面定理中得到解释.

定理 27.16　*如果 $\boldsymbol{F}$ 是梯度向量场，则曲线积分*

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

与联结点 A 和 B 的光滑路径 γ 无关.

在详述这个极强的定理的证明前，我们注意在例 27.14 中的向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=2xy\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 是一个梯度向量场，其位势函数 $\phi(x,y,z)=x^2y+z$. 因此在做这个例题时就已经验证了定理的结论.

为了证明定理 27.16，我们去证明一个甚至包含有更多信息的一个陈述.

定理 27.17 设 $\boldsymbol{F}=\nabla\phi(x,y,z)$ 为一梯度向量场，并设 $\gamma(t)$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上一条空间曲线. 则

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\phi(\gamma(b))-\phi(\gamma(a)). \tag{27.8}$$

证明 此定理显著之处是它实际上直接从定义和多变元的链规则（见 §23.5）得到. 在我们的记号下，$x=\gamma_1(t)$，$y=\gamma_2(t)$，$z=\gamma_3(t)$，$\mathrm{d}x=\gamma'_1(t)\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}y=\gamma'_2(t)\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}z=\gamma'_3(t)\mathrm{d}t$. 因此

$$\begin{aligned}\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\int_\gamma \nabla\phi\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\int_\gamma\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\\&=\int_a^b\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\phi}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t)))\right)\mathrm{d}t\\&=\phi(\gamma(b))-\phi(\gamma(a)).\end{aligned}$$

例 27.18 重新计算 27.14 中的积分.

在此例题中 $A=\gamma(0)=(0,0,0)$，$B=\gamma(1)=(1,1,1)$，另外已经留意到

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=2xy\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\nabla(x^2y+z),$$

即 $\phi(x,y,z)=x^2y+z$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的位势函数. 因此我们的定理告诉我们有

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\phi(1,1,1)-\phi(0,0,0)=2.$$

注 由于出现在定理 27.12 中的积分不依赖于联结端点 $\gamma(a)$，$\gamma(b)$ 的路径，故它可以被写为

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

例 27.19 用求出一个位势函数的办法计算积分

$$\int_{(0,1)}^{(1,\frac{\pi}{2})}2x\sin(x^2y)\,\mathrm{d}x+x^2\sin(x^2y)\,\mathrm{d}y.$$

这时的位势函数是

$$\phi(x,y) = -\cos(x^2y),$$

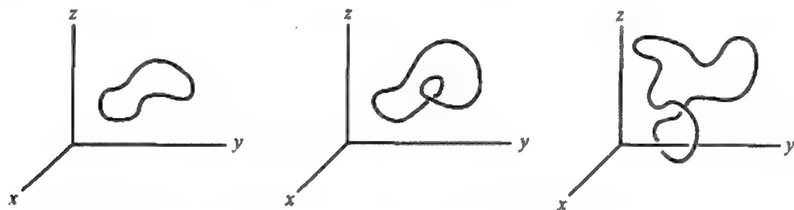
这是因为

$$\nabla(\phi) = 2xy\sin(x^2y)\boldsymbol{i} + x^2\sin(x^2y)\boldsymbol{j}.$$

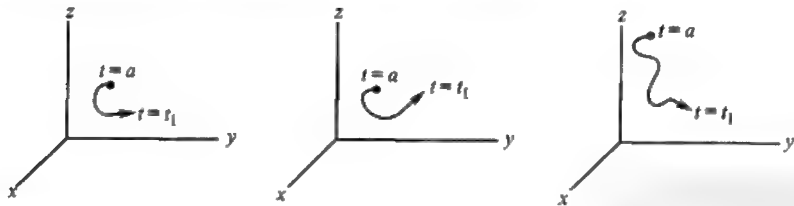
应用定理 27.17 我们看到

$$\int_{(0,1)}^{(1,\frac{\pi}{2})} 2x\sin(x^2y)\,\mathrm{d}x + x^2\sin(x^2y)\,\mathrm{d}y = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = 1.$$

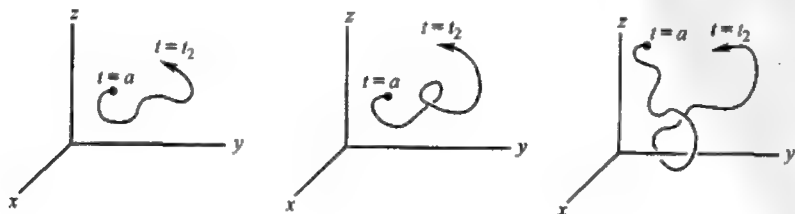
闭曲线 如果曲线 $\gamma(t)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 是条闭曲线，即 $\gamma(a) = \gamma(b)$，那么它的图像显示是一个（可能经过扭曲，冲压，拉伸）闭的不自交的圈.



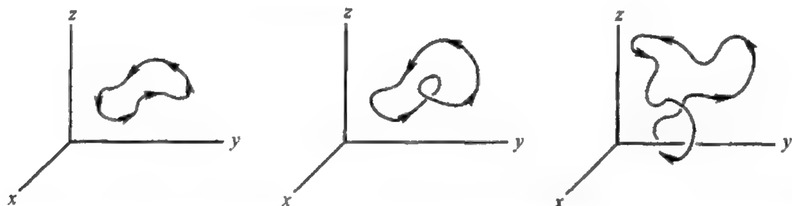
当这些曲线被分阶段描绘时，譬如对某个选取的 t_1，在区间 $a \leqslant t \leqslant t_1$ 上，



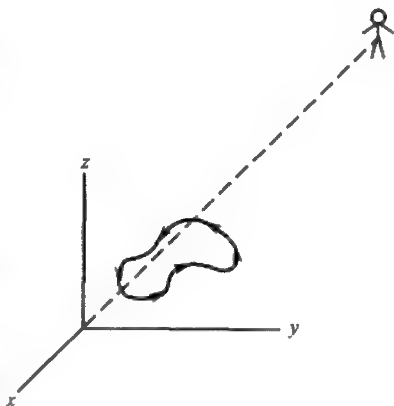
然后是区间 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$，



最后在区间 $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$ 上画完这个圈，



一个自然的逆时针运动呈现出来了. 现在假若我们在负 x 轴上远远的点观察此闭曲线.



追循此曲线时此流向看起来是顺时针的!这清楚表明在三维空间中顺时针和逆时针旋转没有明确的定义. 然而我们可以引进**逆曲线**.

$$\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t),$$

它满足性质 $\gamma^-(b) = \gamma(a), \gamma^-(a) = \gamma(b)$. 当我们固定一个视角时，逆曲线有着相反的定向.

对任何路径(闭或否)都可做出逆曲线的定义，而且容易证明，对已知的任何连续向量场和任何光滑路径 γ,

$$\int_{\gamma^-} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

记号　当曲线 γ 闭时我们把向量场 $\boldsymbol{F}$ 在 γ 上的曲线积分记为

$$\oint_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

(在积分符号中间的那个小圆圈表示 γ 是闭的这件事实.)

我们以一个令人瞩目的结果来结束本节，它是定理 27.17 的直接推论.

定理 27.20　*如果 $\boldsymbol{F}$ 是个梯度向量场，γ 为一光滑闭曲线，则*

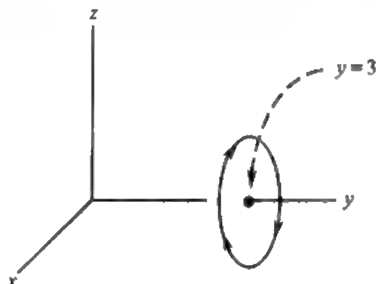
$$\oint_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0. \tag{27.9}$$

例 27.21　设 $\gamma(t) = (\cos(t), 3, \sin(t)), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. 计算逆曲线 $\gamma^-(t)$ 并计算

$$\oint_{\gamma^-} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z.$$

曲线 $\gamma(t)$ 自然是个圆，其定向为右下图所指明（从一个坐标具有正的 x 分量的点上看去）. 由于 $a = 0, b = 2\pi$，逆曲线由

$$\begin{aligned}\gamma^-(t) &= \gamma(a + b - t)\\ &= \gamma(2\pi - t)\\ &= (\cos(2\pi - t), 3, \sin(2\pi - t))\end{aligned}$$



给出. 例题中的向量场实际上是个梯度向量场：

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k} = \nabla(x,y,z),$$

因此

$$\oint_{\gamma^-} (yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z) = 0.$$

§ 27.3 的习题

用求合适的位势函数方法计算下列每个曲线积分.

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (y\mathrm{d}x + (x + 3y^2)\mathrm{d}y)$.

(2) $\int_{(1,-1)}^{(0,3)} (2xy^3\mathrm{d}x + 3x^2y^2\mathrm{d}y)$.

(3) $\int_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{3})} \sin(y)\mathrm{d}x + x\cos(y)\mathrm{d}y)$.

(4) $\int_{(1,1)}^{(2,e)} \left(\ln(y)\mathrm{d}x + \frac{x}{y}\mathrm{d}y\right)$.

(5) $\int_{(1,1)}^{(4,9)} \left(y \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x + 3\sqrt{xy}\mathrm{d}y\right)$.

(6) $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (2xyz\mathrm{d}x + x^2z\mathrm{d}y + x^2y\mathrm{d}z)$.

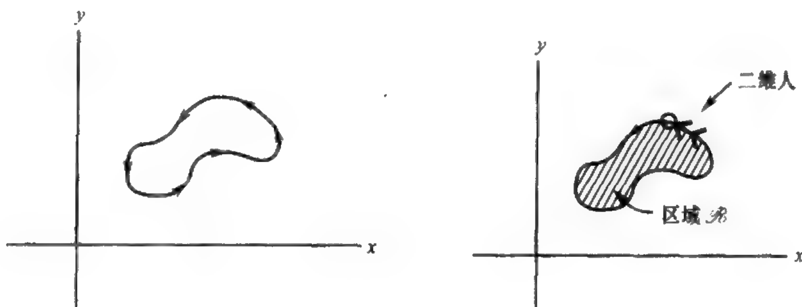
(7) $\int_{(0,1,1)}^{(\frac{\pi}{2},1,2)} (-(\sin(x))\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z)$.

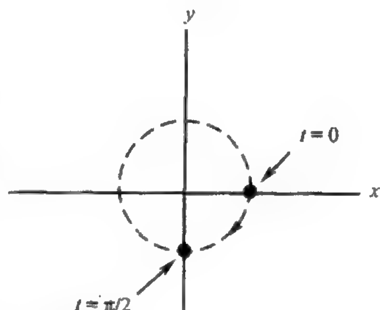
(8) $\int_{(0,0,0)}^{(0,1,1)} (e^x\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}z)$.

(9) $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} (z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z)$.

27.4　平面的格林定理

设 $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), 0 \leqslant t \leqslant b$，为 xy – 平面上的一条闭曲线，它不自交并对 $a \leqslant t \leqslant b$ 只经过一次. 我们断言，由于 γ 位于二维平面中，定向的概念可以准确确定. 如果我们想像有一个二维人（他生活在二维平面内）当 t 从 a 到 b 增加时经过曲线 $\gamma(t)$. 于是，假若当此二维人绕此曲线前行时，曲线包围的区域（记为 $\mathscr{R}$）总在他的左边，则说此曲线有一个**逆时针定向**.





例 27.22 确定 $\gamma(t) = (\cos(t), -\sin(t))$ 对区间 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 的定向.

这条闭曲线自然是个圆. 让我们画出对区间 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ 的四分之一的圆. 显然此定向是顺时针的.

定义 一条曲线 $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$ 被称做**简单闭曲线**是说如果下列条件成立:

(1) $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ 为 t 的连续函数并且是分段可微的, 即存在区间的一个划分: $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n = b$, 使得 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 在每个区间 $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ 是可微的.

(2) $\gamma(a) = \gamma(b)$, 即 γ 是闭的.

(3) γ 不自交.

(4) 当 t 从 a 增加到 b 时 γ 只经过一次.

我们现在正处于叙述一个著名等式的时候, 这是个在绕简单曲线(逆时针定向)的曲线积分和在此曲线包围的区域上的二重积分之间的等式.

定理 27.23(格林定理) 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是 x 和 y 的可微函数, 又设 $\mathscr{R}$ 是个区域, 其边界 $\partial\mathscr{R}$ 是一条简单闭曲线并以逆时针定向. 于是有

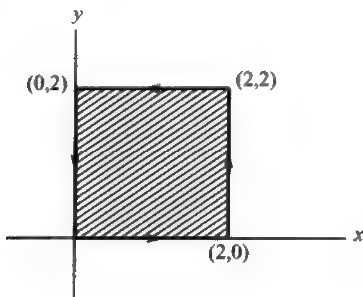
$$\oint_{\partial\mathscr{R}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{27.10}$$

为了解释这个令人瞩目的陈述, 我们暂且推延一下证明.

例 27.24 设 $\boldsymbol{F} = (x^2 - y^2)\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j}$. 计算

$$\oint_{\partial\mathscr{R}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 $\partial\mathscr{R}$ 是画于下面的正方形的边界.



在这个例题中 $P(x,y) = x^2 - y^2, Q(x,y) = xy$,格林定理告诉我们

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\mathscr{R}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \oint_{\partial\mathscr{R}} (x^2 - y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\mathscr{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \int_0^2 (y - (-2y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^2 3y\mathrm{d}y = 12.\end{aligned}$$

例 27.25　已知区域 $\mathscr{R}$,其边界为简单闭曲线并以逆时针定向,证明

$$面积(\mathscr{R}) = \oint_{\partial\mathscr{R}} x\mathrm{d}y. \tag{27.11}$$

当我们令 $P = 0, Q = x$ 并用格林定理时,立即得到等式:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\mathscr{R}} x\mathrm{d}y &= \oint_{\partial\mathscr{R}} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) \\ &= \iint_{\mathscr{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\mathscr{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 面积(\mathscr{R}).\end{aligned}$$

例 27.26　用格林定理计算椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的面积.

要进行此计算我们先对此椭圆参数化为一条简单闭曲线：

$$\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t)),$$

其中 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. 追循此曲线便很快看出其定义是逆时针的,因此由(27.11)有

$$\text{面积(椭圆)} = \oint_{\gamma} x\mathrm{d}y.$$

要计算这个曲线积分则要注意到 $x = a\cos(t), y = b\sin(t), \mathrm{d}y = b\cos(t)\mathrm{d}t$,因而

$$\begin{aligned}\text{面积(椭圆)} &= \int_0^{2\pi} a\cos(t) \cdot b\cos(t)\mathrm{d}t \\ &= ab\int_0^{2\pi}(\cos(t))^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2t))\mathrm{d}t = ab\pi.\end{aligned}$$

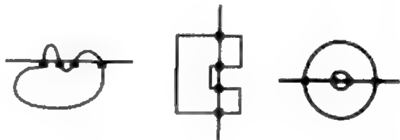
在提出格林定理的证明(它原来是出人意料地初等)之前,我们需要下面的定义.

定义　*称一个区域 $\mathscr{R}$ 是简单的是说,如果任意水平或垂直直线交其边界最多只有两个点.*

例如,下面的区域是简单的,



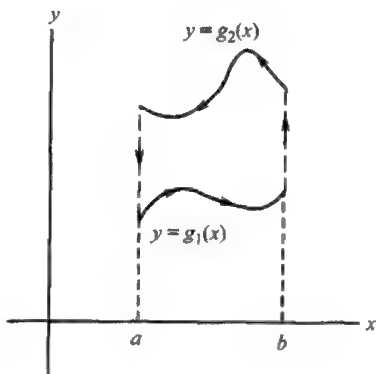
而下面的这些则不是.



格林定理的证明　我们给出当 $\mathscr{R}$ 是简单区域情形的证明,其边界仍记为 $\partial\mathscr{R}$. 格林定理的更一般形式可以由分解一个一般区域为简单区域的办法得到,如下图所示.



进一步我们假设这个简单区域具右图形式，其中在图中的垂直直线可以具有长度 0.



要证明格林定理中的等式只要证明

$$\oint_{\partial\mathscr{R}} P\mathrm{d}x = -\iint_{\mathscr{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即可，因为证明

$$\oint_{\partial\mathscr{R}} Q\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

完全相似(留给读者).

因为 $\partial\mathscr{R}$ 是四条曲线的并，我们对每个分别地参数化. 注意在竖直线段的参数化中，x 是常数(或 a 或 b)，因此 $\mathrm{d}x=0$，从而对曲线积分 $\oint_{\partial\mathscr{R}} P\mathrm{d}x$ 没有任何贡献. 剩下的曲线的参数化分别为

$$x=x, y=g_2(x) \text{ 和 } x=x, y=g_1(x).$$

因此，

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\mathscr{R}} P\mathrm{d}x &= \int_a^b P(x,g_1(x))\mathrm{d}x + \int_b^a P(x,g_2(x))\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b (P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x)))\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= -\iint_{\mathscr{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

注意这最后面的那个等式是微积分基本定理的一个推论.

§ 27.4 的习题

用你的 CAS 作图的方法确定下列闭曲线的定向.

(1) $\gamma(t) = (\sin(t), -\cos(t)), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(2) $\gamma(t) = \left(-\frac{\sin(t)}{2}, -\frac{\cos(t)}{3}\right), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(3) $\gamma(t) = \left(\frac{\cos(t)}{2}, -\frac{\sin(t)}{5}\right), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(4) $\gamma(t) = (\cos(t) + \sin(t), \cos(t) - \sin(t)), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

用格林定理计算下列的曲线积分.

(5) $\oint_{\partial\mathscr{R}}((x^2 + y^2)dx - xydy)$,其中 $\partial\mathscr{R}$ 是矩形 $\mathscr{R}: 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2$ 的边界,取反时针定向.

(6) $\oint_{\partial\mathscr{R}}((3x^2y + y^3)dx - y^{10}dy)$,其中 $\partial\mathscr{R}$ 是圆盘 $x^2 + y^2 \leqslant 4$ 的边界,逆时针定向.

(7) $\oint_{\partial\mathscr{R}}((e^x + y)dx - (x - e^y)dy)$,其中 $\partial\mathscr{R}$ 是以(0,0),(0,-1),和(1,0)为顶点的三角形 $\mathscr{R}$ 的边缘,并以逆时针定向.

(8) $\oint_{\gamma}((y^2 + x)dx + (xy - y)dy)$,其中 γ 是椭圆 $\left(\frac{\cos(t)}{3}, -\frac{\sin(t)}{2}\right), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(9) $\oint_{\gamma}((y^2 + x^2)dx + (2x - y^2)dy)$,$\gamma$ 为圆 $(-3\cos(t), 3\sin(t)), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

用你的 CAS 画出下列习题中的闭曲线 γ. 用格林定理计算 γ 所围成的面积. 在你的 CAS 上用二重积分计算此面积以检验你的答案.

(10) $\gamma = \left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$

(11) $\gamma = \left\{\left(-\frac{\cos(t)}{4}, \frac{\sin(t)}{25}\right) \mid 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\right\}$

(12) $\gamma = \{((\cos(t))^3, (\sin(t))^3) \mid 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$

(13) $\gamma = \{(\cos(t) + \sin(t), \cos(t) - \sin(t)) \mid 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$

(14) γ = 顶点在(0,0),(1,2)和(-1,4)的三角形的边缘.

(15) γ = 顶点在(0,0),(1,0),(2,1)和(-1,5)的四边形的边缘.

第二十七章的附加习题

用你的CAS得出下列向量场的图形显示. 如果你的CAS没有这个功能,则简单地画出几个代表向量来模仿这个向量场的图形显示.

(1) $\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$.

(2) $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

(3) $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$,其中 $\phi(x,y) = \cos(x) + \frac{1}{2}y^2$.

在下面的习题中确定$\boldsymbol{v}$是否是梯度向量场，如果是，则求出其位势函数.

(4) $\boldsymbol{v} = x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j}$.

(5) $\boldsymbol{v} = ye^{xy}\boldsymbol{i} + xe^{xy}\boldsymbol{j}$.

(6) $\boldsymbol{v} = 3x^2y^2z\boldsymbol{i} + 2x^3yz\boldsymbol{j} + x^3y^2\boldsymbol{k}$.

(7) $\boldsymbol{v} = (x^2 + yz)\boldsymbol{i} + (y^2 + 2x)\boldsymbol{j} + (z^2 + xy)\boldsymbol{k}$.

在下面在你的 CAS 上画出力场$\boldsymbol{F}$并求出当沿空间曲线γ移动质点时力场所做的功. 画出每条γ.

(8) $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}, \gamma(t) = (t, e^t), 0 \leqslant t \leqslant 10$.

(9) $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$，而$\gamma$是平面$x + y + z = 2$中顶点在$(2,0,0)$，$(0,2,0)$，$(0,0,2)$的三角形，定向是从$z$轴向下看时的反时针.

(10) $\boldsymbol{F} = 3x^2y^2z\boldsymbol{i} + 2x^3yz\boldsymbol{j} + x^3y^2\boldsymbol{k}$，$\gamma$是平面$x + y + z = 2$中顶点在$(2,0,0)$，$(0,2,0)$，$(0,0,2)$的三角形，定向是从$z$轴向下看时的反时针.

(11) $\boldsymbol{F} = (z - \sin(x))\boldsymbol{i} + (x + y^2)\boldsymbol{j} + (y + e^z)\boldsymbol{k}$，$\gamma$为单位球面和锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$的交线，定向为从$z$轴向下看时的反时针.

(12) $\boldsymbol{F} = (x^2 + yz)\boldsymbol{i} + (y^2 + zx)\boldsymbol{j} + (z^2 + xy)\boldsymbol{k}$，$\gamma$为抛物线$(t, t^2, 0)$，$0 \leqslant t \leqslant 5$.

用找出一个适合的位势函数的方法计算下面的每个曲线积分.

(13) $\int_{(1,0)}^{(2,\frac{1}{3})} (2xy^3\,dx + (1 - 3x^2y^2)\,dy)$.

(14) $\int_{(1,0)}^{(3,3)} \left(\left(e^x\ln y - \frac{e^y}{x}\right)dx + \left(\frac{e^x}{y} - e^y\ln(x)\right)dy\right)$.

(15) 求函数$g(x)$，使得

$$\boldsymbol{v} = g(x)(x\sin(y) + y\cos(y))\boldsymbol{i} + g(x)(x\cos(y) - y\sin(y))\boldsymbol{j}.$$

为梯度向量场.

用格林定理计算下列曲线积分.

(16) $\oint (x^2 - y^2)\,dx + x\,dy$，$\gamma$为圆$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

(17) $\oint \ln(1 + y)\,dx - \frac{xy}{1 + y}dy$，$\gamma$为顶点是$(0,0)$，$(2,0)$和$(0,5)$的三角形.

用格林定理计算下面区域的面积. 用你的 CAS 画出此区域.

(18) 在第一象限由$y = x$，$y = \frac{1}{x}$和$y = \frac{x}{10}$包围的区域.

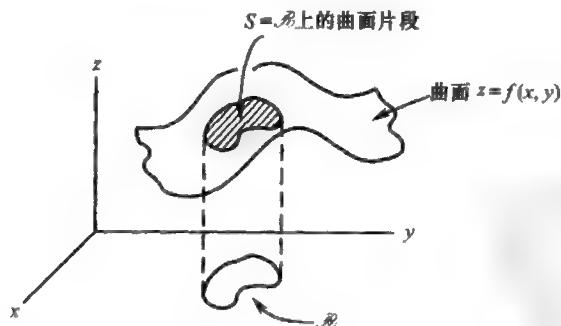
(19) 区域$\gamma(t) = (5\cos^3(t), \sin^3(t))$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(20) 由$y = 3$和$y = x^2$包围的区域.

第二十八章　曲面积分

28.1　曲面积分

设 $z=f(x,y)$ 为 x,y 的函数,它在 xy - 平面上的一个有界区域 $\mathscr{R}$ 上可微.



记 $\mathscr{R}$ 上的曲面片段为

$$S=\{(x,y,z)\mid z=f(x,y)\text{ 且 }x,y\in\mathscr{R}\},$$

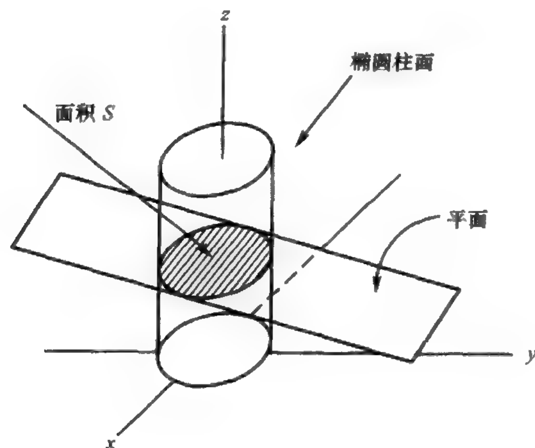
我们宣称 S 的面积由积分

$$\text{面积}(S)=\iint\limits_{\mathscr{R}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{28.1}$$

给出.

这个公式令人想起在 §16.3 中推导出的弧长公式(参看 §22.2 也是切题的). 在证明(28.1) 之前我们先从一些显示其用途的例题开始.

例 28.1 求平面 $x+2y+6z=12$ 在椭圆柱面 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 内部的那一块的面积.



由定义

$$S=\{(x,y,z)\mid x+2y+6z=12,\text{且}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1\}.$$

因此 $z=f(x,y)=\frac{1}{6}(12-x-2y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{6}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{3}$. 我们的公式给出了想要的面积:

$$\begin{aligned}
\text{面积}(S) &= \iint\limits_{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1}\sqrt{1+\left(\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{9}\right)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{41}}{6}\iint\limits_{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

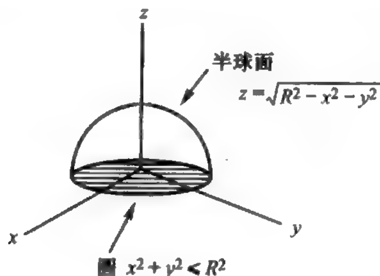
$$=\frac{\sqrt{41}}{6}\cdot 15\pi=\frac{5\sqrt{41}}{2}\pi.$$

例 28.2（球的表面面积）　计算半径为 R 的球的表面面积.

如同我们常常看到的那样，球面上的点 (x,y,z) 满足方程 $x^2+y^2+z^2=R^2$. 而函数

$$z=f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

在 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 有明确的定义. 其图像显示是熟悉的半径为 R 的半球面.



这时 $f(x,y)$ 关于 x 和 y 的偏导数各为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}(R^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x),\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}(R^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2y).$$

我们的公式令半球面的曲面面积由（反常）积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=R\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

给出. 这个积分自然适合于极坐标，在其上积分的那个区域很容易被描述为一个极区域. 因此设

$$x=r\cos(\theta),y=r\sin(\theta),\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

而积分变为

$$R\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

为完成此计算我们采用简单的替换 $u=R^2-r^2,\mathrm{d}u=-2r\mathrm{d}r$,

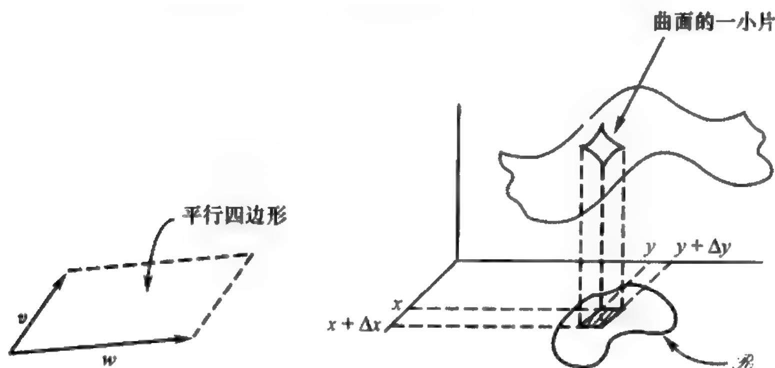
$$\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2-r^2}}=-\frac{1}{2}\int_{R^2}^0\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}=R,$$

这表明

$$R\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2-\sigma^2}} = 2\pi R^2$$

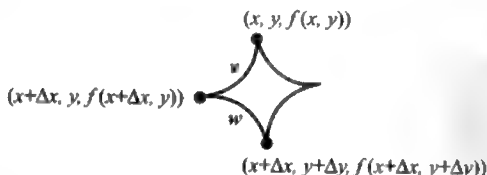
为半球的曲面面积,从而 $4\pi R^2$ 为整个球面的面积.

曲面面积公式的推导　回忆(见 §20.7)如果 $\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ 为三维空间中的非零向量且不相互平行,它们则张成一个平行四边形



其面积为 $|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|$.

现考虑在 xy - 平面中一个面积为 $\Delta x\cdot\Delta y$ 的小矩形. 当我们将 $z=f(x,y)$ 应用于此小矩形时得出曲面 $z=f(x,y)$ 的一小片. 当我们放大这一小片曲面并计算其端点时得到了下面的图.



当我们定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \Delta x\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + (f(x+\Delta x,y) - f(x,y))\boldsymbol{k}\\ &\approx \Delta x\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{w} &= 0\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + (f(x+\Delta x,y+\Delta y) - f(x+\Delta x,y))\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\approx \Delta y\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\boldsymbol{k},$$

这一小片曲面的面积近似于

$$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}| \approx \left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \Delta x & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x \\ 0 & \Delta y & \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \end{matrix}\right\| = \left| -\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\Delta y\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\Delta x\Delta y\boldsymbol{j} + \Delta x\Delta y\boldsymbol{k}\right|$$

$$= \left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\right)\Delta x\Delta y.$$

所考虑的总面积由对在区域 $\mathscr{R}$ 中的所有小矩形上的曲面片的面积求和得到,因此我们得到了公式

$$\text{面积}(S) = \iint_{\mathscr{R}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

§28.1 的习题

计算下列曲面 S 的面积.

(1) S 为圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2, 0 \leqslant z \leqslant 1$.

(2) S 为平面 $2x - y + 3z = 4$ 在椭圆柱 $x^2 + \frac{y^2}{4} \leqslant 2$ 中的那部分.

(3) S 为曲面 $z = xy$ 在半径 4 中心在原点的圆盘上的部分.

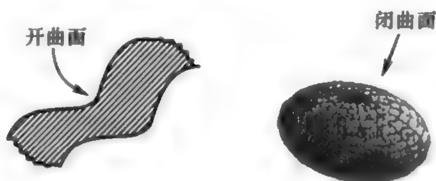
(4) S 为单位球面(中心在原点,半径 1) 在平面 $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 上面的那部分.

(5) S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(6) S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 在椭圆柱 $x^2 + \frac{y^2}{4} \leqslant 1$ 内的那部分.

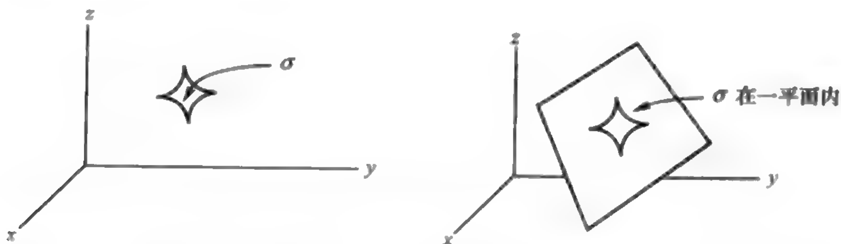
28.2 开曲面的曲面积分

在考虑曲面时,我们必须把那些为立体边界被称做**闭曲面**的与那些不是如此的曲面分开来.



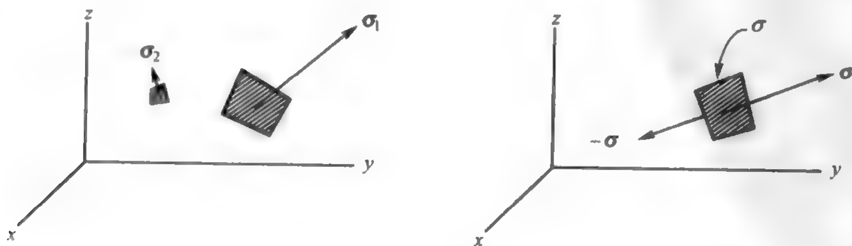
后一种类型的曲面被称做**开曲面**,本节专门讨论它;至于闭曲面将在 §28.3 中讨论.

设 σ 代表位于三维空间中的二维曲面的一小块. 我们将假定 σ 实际上是平坦的,即 σ 位于某个平面内.



定义　相伴于 σ 的记作 $\boldsymbol{\sigma}$ 的**曲面向量**是个垂直于 σ 而长度等于 σ 面积的向量.

这个概念容易形象化:如果面积(σ_1) 较大则 $\boldsymbol{\sigma}_1$ 很长,而当面积(σ_2) 小时 $\boldsymbol{\sigma}_2$ 则短. 进一步注意到这里总有两个从 σ 出发的不同的曲面向量(因为 σ 是平坦的).



如果我们可以表达一个曲面向量为形式 $\boldsymbol{\sigma} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$,其中 $c \neq 0$,即 $\boldsymbol{\sigma}$ 不在一个垂直于 xy - 平面的平面内,因此区分这两种可能性的是 $\boldsymbol{k}$ 分量的符号,即 c 的符号. 我们引进下面的记号以使此表现清晰.

记号 已知二维曲面的一个平坦小块 σ,它不在垂直于 xy - 平面的平面内,令 $\boldsymbol{\sigma}^+$ 代表其 $\boldsymbol{k}$ - 分量为正的曲面向量. 我们将指称 $\boldsymbol{\sigma}^+$ 为 $\boldsymbol{k}$ - 正向曲面向量. 以 $\boldsymbol{\sigma}^-$ 代表 $\boldsymbol{k}$ - 负向曲面向量,它被定义为

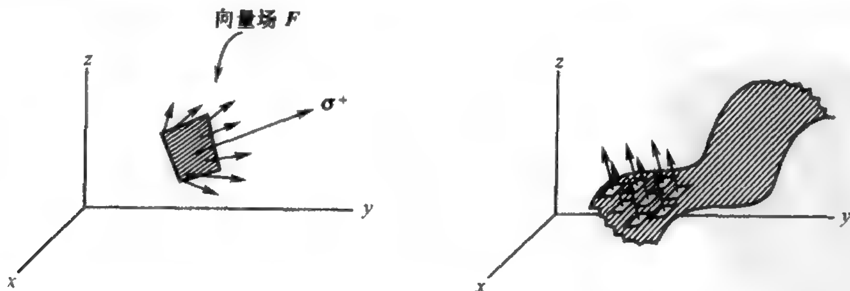
$$\boldsymbol{\sigma}^- = -\boldsymbol{\sigma}^+.$$

注意 $\boldsymbol{\sigma}^-$ 的 $\boldsymbol{k}$ - 分量是负的.

注 如果 $\boldsymbol{\sigma}$ 位于垂直于 xy - 平面的平面中,则 $\boldsymbol{\sigma}$ 的 $\boldsymbol{k}$ - 分量为 0,我们便不能通过它们的 $\boldsymbol{k}$ - 分量来区分这两种可能的曲面向量. 然而这两个曲面向量可由考查其 $\boldsymbol{i}$ - 或 $\boldsymbol{j}$ - 分量的符号来区分. 在这些情形可给出相似的定义. 为简化讨论,我们现在只注意具非零 $\boldsymbol{k}$ - 分量的曲面向量. 以 $z = f(x,y)$ 形式给出的曲面便是这种情形,这里的 f 是可微的:这个曲面的一个法向量是由 $z - f(x,y)$ 的梯度给出(见 §23.6),即

$$\nabla(z - f(x,y)) = -\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

由于曲面面积的定义在技术方面有一些复杂,我们先从一个有启发性的讨论开始. 给出一个向量场 $\boldsymbol{F}$(可以直观地想成是一个力场或流)以及一小块平坦曲面 σ,和与其相伴的曲面向量 $\boldsymbol{\sigma}^+,\boldsymbol{\sigma}^-$,总的穿过 σ 的 $\boldsymbol{k}$ - 正向力(流)近似地为 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}^+$,而总的穿过 σ 的 $\boldsymbol{k}$ - 负向力近似地为 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}^-$,我们在这两种情形中计算曲面上的向量场.



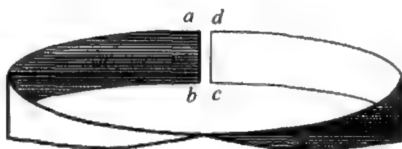
穿过一个大曲面 S 的总 $\boldsymbol{k}$ - 正向力(流)是这样得到的:首先用无穷多个无穷小的带有曲面向量 $d\boldsymbol{\sigma}^+$ 的小块覆盖此曲面(使此曲面好像是一条由小块拼缝成的床单),然后再取这些无穷小平坦小块的流量和的极限. 这个和的极限被定义为

曲面积分$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+$. 相似地，$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^-$ 代表穿过 S 的总 $\boldsymbol{k}$ – 负向流量.

在上面的描述中隐含地假定了：当我们沿着曲面（在我们的小块上）选择法向量时，我们一直在坚持这种方向选择. 这种假定并不像它初看起来的那样会傻气. 当上面所展示的证明没有明显可见的难点时，问题却在考虑扭曲的曲面时产生了. 先看一个生动的例子. **默比乌斯带**是由取一长条纸带做成的，将此纸带扭转，然后粘合起相对的边（即在下图中 a 粘合到 d 而 b 粘合到 c）.







这些动作的结果是一条默比乌斯带（我们敦促读者用纸和胶带亲自做一下）. 关于这个曲面的独特之处（和棘手之处）在于，如果你开始于一个曲面向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 并沿着曲面行进，在完成一圈之后你停在曲面上同一点但此向量却指向相反的方向. 因此不可能协调地拼制成一条默比乌斯带，使其曲面向量都指向相同的 $\boldsymbol{k}$ – 正向，或 $\boldsymbol{k}$ – 负向. 默比乌斯带是称做不可定向的曲面的例子.

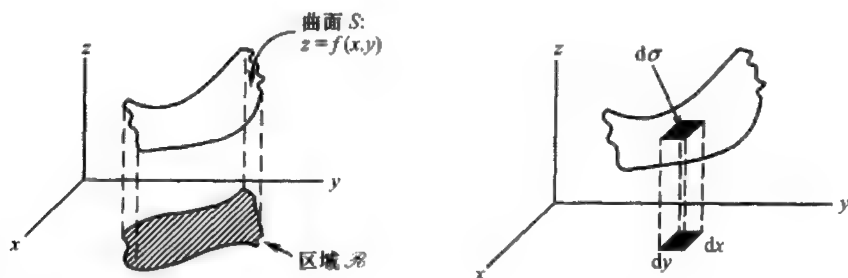
这个特异的例子推动了对定向性的一般定义. 一个曲面 S 被称做**定向的**是说，如果在一点 P 选取了一个法向量，则当我们沿 S 上一条闭路径回到 P 时，法向量的方向没有改变. 可定向性让我们能协调地拼制我们的曲面. 应该说明，可定向性是件普遍的现象，例如任一单连通三维立体的边缘是可定向的，任意可微函数 $z = f(x,y)$ 的图像也是如此.

设 S 是个定向曲面，它是可微函数.

$$z = f(x,y)$$

在 xy – 平面中有界区域 $\mathscr{R}$ 上的图像. 设 $\mathrm{d}\sigma$ 为 S 上曲面面积的一个无穷小的小块，其在 xy – 平面上的投影是个无穷小的具面积 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的矩形. 在 §28.1 中已证过我们现在记为 $\mathrm{d}\sigma$ 的面积，它由公式

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{28.2}$$



给出. 现回想(见 §23.6) 曲面 $z - f(x,y) = 0$ 在点(x,y,z) 的法向量是由 $z - f(x,y)$ 的梯度给出的:

$$\nabla(z - f(x,y)) = -\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

注意,这是个 $\boldsymbol{k}$ - 正向法向量. 此向量的模是我们熟悉的平方根

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

(事实是在(28.2) 中出现的平方根让我们推导出了曲面积分的一个优美的公式(28.5).) 因此一个单位的 $\boldsymbol{k}$ - 正向法向量 $\boldsymbol{n}^+$ 由商

$$\boldsymbol{n}^+ = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \tag{28.3}$$

给出,而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}^- &= -\boldsymbol{n}^+ \\ &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\end{aligned}$$

给出,这是曲面 $z - f(x,y) = 0$ 的单位 $\boldsymbol{k}$ - 负向法向量.

与我们的无穷小曲面块相伴的是两个曲面向量:$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^-$. 由定义,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+ = \boldsymbol{n}^+ \,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

以及

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^- = -\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+ = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{28.4}$$

我们现在去充实关于曲面积分的直观讨论.

定义 设$\boldsymbol{F} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$为一**可微向量场**(即分量函数$P,Q$和$R$为可微),设$S$是一定向曲面,它由在$xy$-平面上一个有界区域$\mathscr{R}$上的可微函数$z = f(x,y)$给出.定义$\boldsymbol{k}$-正向曲面积分为

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+ = \iint_{\mathscr{R}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}P - \frac{\partial f}{\partial y}Q + R\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{28.5}$$

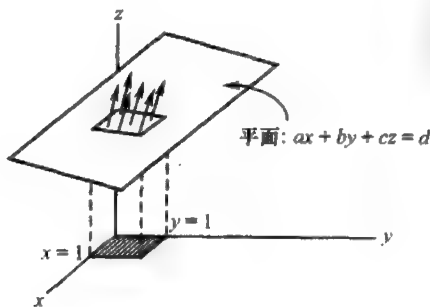
其中P,Q,R在曲面上取值,即在(28.5)中$P = P(x,y,f(x,y))$等等.这个曲面积分也被指称为穿过曲面S的总的$\boldsymbol{k}$-**正向流量**.穿过S的$\boldsymbol{k}$-**负向流量**定义为

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^- = \iint_{\mathscr{R}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q - R\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{28.6}$$

其中P,Q和R在曲面上取值.

注 公式(28.5)和(28.6)直接由(28.4)取$\boldsymbol{F}$分别与$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+$和$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^-$的点积得到.

例 28.3(穿过平面的流量) 求向量场$\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$穿过平面$ax + by + cz = d\ (c \neq 0)$在$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$部分的$\boldsymbol{k}$-正向流量.



为了计算这个流量，我们先把此曲面表示为 $z = f(x,y),(x,y) \in \mathscr{R}$ 的形式. 这容易完成：此平面为 $z = \frac{1}{c}(d - ax - by)$，而区域 $\mathscr{R}$ 可简单表为 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$. 于是

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{a}{c}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{b}{c},$$

而且由定义，这个 $\boldsymbol{k}$ - 正向流量为

$$\int_0^1\int_0^1\left(\frac{a}{c}x^2 + \frac{b}{c}xy + 1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\frac{a}{c} + \frac{1}{4}\frac{b}{c} + 1.$$

例 28.4（穿过半球面的流量） 设 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$. 计算 $\boldsymbol{k}$ - 正向流量，其中 S 为半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0$.

在这例题中 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = f(x,y)$ 为半球面的方程. 因此

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

区域 $\mathscr{R}$ 只不过是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的内部. 结合这些信息我们看到

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+ = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

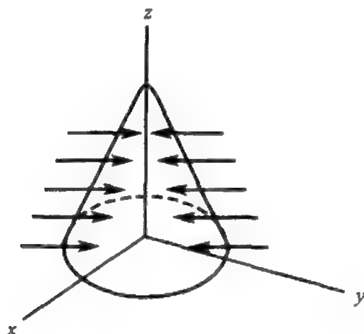
这个积分自然适合于转换为极坐标 $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ 进行计算：

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1 - r^2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1 - r^2}}\mathrm{d}r \qquad (\text{令 } u = 1 - r^2) \\ &= \pi\int_0^1 \frac{1 - u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

例 28.5（流进抛物面的流量） 画在下图中的抛物面方程为 $z = 1 - x^2 - y^2$. 求二维位置向量场 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ 穿过此面的总 $\boldsymbol{k}$ - 负向流量. 我们有 $z = f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$，因此 $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$，而 $\boldsymbol{k}$ - 负向流量由下式转换为极坐标给出：

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^- = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} -(2x^2 + 2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2 \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = -\frac{4\pi}{3}.$$



§28.2 的习题

对下列曲面 S 和向量场 $\boldsymbol{F}$ 计算曲面积分 $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+$ 和 $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^-$.

(1) $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$，其中 S 为平面 $2x - y + 3z = 2$ 中 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2$ 的部分.

(2) $\boldsymbol{F} = 2y\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$，其中 S 是抛物面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 在 xy - 平面上的部分.

(3) $\boldsymbol{F} = -x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$，其中 S 为曲面 $z = xy$ 位于矩形 $-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2$ 之上的部分.

(4) $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，其中 S 为圆锥 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 的部分.

(5) $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，其中 S 为曲面 $z = x^2 - xy + y^2$ 在矩形 $0 \leqslant x \leqslant 1, 1 \leqslant y \leqslant 2$ 上的那部分.

(6) $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$，$S$ 为下半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leqslant 0$.

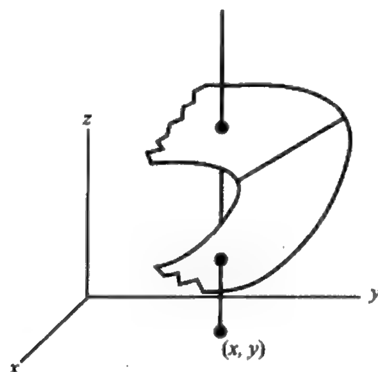
(7) $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，其中 S 是顶点在 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$ 和 $(0,0,2)$ 的三角形.

(8) $\boldsymbol{F} = 3xz\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - y^2\boldsymbol{k}$，其中 S 为顶点在 $(-1,1,0)$，$(1,0,1)$ 和 $(0,0,5)$ 的三角形.

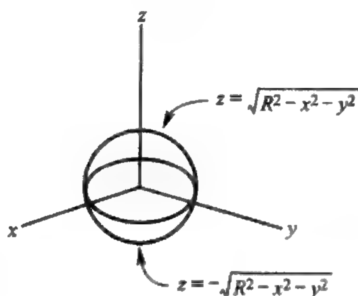
28.3　闭曲面的曲面积分

闭曲面(比如像球面或椭球面)不能表示为一个函数 $z = f(x,y)$ 的图像显示. 注意这类比于 xy - 平面中一条闭曲线永不是某个函数 $y = g(x)$ 的图像显示. 要明白这点，回忆由定义，给出一个函数 $z = f(x,y)$，表示对此平面中每个点 (x,y) 只有一个唯一的值 $z = f(x,y)$. 因此函数的图像显示不能像下图那样弯曲(从而给出第二个 z 值)以形成一个闭曲面. 但是取一个闭曲面并将其表示为若干个曲面的并，其中每一片是某个函数的图像显示是可能的. 下面的例子解

释了这个过程.

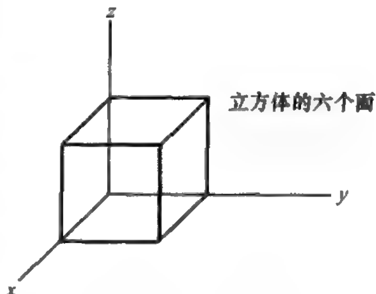


例 28.6(球面) 函数 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 以半径 R 的上半球面为其图像显示,记为 $S^{(上半)}$ 而 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 给出下半球面 $S^{(下半)}$. 整个球面简单地为并 $S = S^{(下半)} \cup S^{(上半)}$.



例 28.7(立方体) 单位立方体是六个不同开曲面 $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ 的并,它们由六个函数给出,

$$S_1: z = 0, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1)$$
$$S_2: z = 1, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1)$$
$$S_3: y = 0, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1)$$
$$S_4: y = 1, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1)$$
$$S_5: x = 0, \quad (0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1)$$
$$S_6: x = 1, \quad (0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1).$$



一旦我们把闭曲面描述为不重叠的开曲面的并

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m,$$

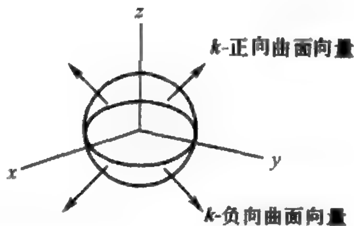
我们就可以定义这种曲面积分了. 回想要计算一个曲面积分,必须选取曲面向量,而这种选取有两种方式. 这里的标准约定是曲面向量指向外部(在作此假定时,已暗含了此闭曲面有一个明确定义的内部和外部的假定). 为完成此任务,我们集中于开曲面 $S_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 中每一个,并选取指向外部的曲面向量 $\boldsymbol{\sigma}_i$. 注意,我们在选择这些曲面向量时,有时用 $\boldsymbol{k}$ - 正向曲面向量,有时用 $\boldsymbol{k}$ - 负向曲面向量(同样有 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{i}$ 正向和负向曲面向量). 现在给出向量场 $\boldsymbol{F}$,我们定义

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{m} \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_i. \tag{28.7}$$

例 28.8　设 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$,计算曲面积分

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},$$

其中 S 是半径为 1 的球面.



在例 28.6 中我们看到 $S = S^{(下半)} \cup S^{(上半)}$,其中 $S^{(上半)}$ 由函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 给出而 $S^{(下半)}$ 由 $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 给出. 这时 $S^{(上半)}$ 的曲面向量指向外表明为 $\boldsymbol{k}$ 正向,而 $S^{(下半)}$ 指向外的曲面向量是 $\boldsymbol{k}$ 负向的. 回想例 28.4 中的计算,我们有

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} &= \iint_{S^{(上半)}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+ + \iint_{S^{(下半)}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^- \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{8}{3}\pi.\end{aligned}$$

例 28.9　设 $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} - 2xz\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$. 计算曲面积分 $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$,其中 S 为例28.7 的单位立方体的表面.

为了计算此曲面积分,我们首先计算各片段 S_i 的外法向量. 在曲面 S_1 上,$z = 0, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$,从而 $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{k}$. 类似地,$\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{k}$. 剩下的立方体的面

实际上不是形如 $z = f(x,y)$ 的函数的图像显示. 曲面 S_3 事实上是形如 $y = f(x,z)$ 的函数的图像显示，在这里 $f(x,z) = 0$. 相似地,S_4 是函数 $y = f(x,z) = 1$ 的图像显示. 这两种情形中 $\boldsymbol{n}_3 = -\boldsymbol{j}, \boldsymbol{n}_4 = \boldsymbol{j}$. 最后,$S_5$ 和 S_6 分别是 $x = f(y,z) = 0$ 和 $x = f(y,z) = 1$ 的图像显示，它们的法向量为 $\boldsymbol{n}_5 = -\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}_6 = \boldsymbol{i}$.

形如 $y = f(x,z)$(或 $x = f(y,z)$) 的函数的曲面积分完全以 §28.2 和 §28.3 中的考虑的相同方式进行计算(注意,可定向性的概念与任何特定变量无关). 因此这时曲面向量由下式给出：

$$d\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{n}_1 dxdy,\quad d\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{n}_2 dxdy,\quad d\boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{n}_3 dxdz,$$
$$d\boldsymbol{\sigma}_4 = \boldsymbol{n}_4 dxdz,\quad d\boldsymbol{\sigma}_5 = \boldsymbol{n}_5 dydz,\quad d\boldsymbol{\sigma}_6 = \boldsymbol{n}_6 dydz,$$

而曲面积分为

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^1\int_0^1 ydxdy + \int_0^1\int_0^1 -ydxdy + \int_0^1\int_0^1 2xzdxdz + \int_0^1\int_0^1 -2xzdxdz + \int_0^1\int_0^1 0dydz + \int_0^1\int_0^1 dydz = 1.$$

§28.3 的习题

设 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 为位置向量场. 在习题(1) ~ (5) 中计算 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$, S 为下列已知曲面.

(1) S 为单位立方体:$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 的表面.

(2) S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

(3) S 为四面体的表面,顶点为(0,0,0),(2,0,0),(0,2,0),(0,0,5).

(4) S 为圆柱 $y^2 + z^2 \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 2$ 的表面.

(5) S 为圆柱 $x^2 + z^2 \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 2$ 的表面.

(6) 设 $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ 为自旋向量场. 证明

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

对上面的每个闭曲面都成立.

28.4　散度定理

设 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 为一个可微向量场.

定义　记为 $\mathrm{div}(\boldsymbol{F})$ 的 $\boldsymbol{F}$ 的散度由下面的公式定义：

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) &= \nabla \cdot \boldsymbol{F} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot \boldsymbol{F} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.\end{aligned}$$

注 向量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度是三个变量 x,y,z 的纯量函数.

例 28.10 计算 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 3x^2y\boldsymbol{i} - 2x^3y^4z\boldsymbol{j} + z^5\boldsymbol{k}$ 的 $\operatorname{div}(\boldsymbol{F})$.

在这里我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(-2x^3y^4z) + \frac{\partial}{\partial z}(z^5) \\ &= 6xy - 8x^3y^3z + 5z^4.\end{aligned}$$

例 28.11 计算在 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2e^x\cos(yz)\boldsymbol{i} + (\ln y)\boldsymbol{j} + \cos(xz)\boldsymbol{k}$ 时的 $\operatorname{div}(\boldsymbol{F})$.

在此例中

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = 2e^x\cos(yz) + \frac{1}{y} - x\sin(xz).$$

现在考虑一个三维的实体 B 及包住 B 的表面,即我们记作 ∂B 的 B 的边界. 显然 ∂B 是个闭曲面.

定义 *称一个闭曲面是简单的是说如果:*

(1) 它是由两个变量的可微函数界定的有限个曲面的并.

(2) 它是定向的.

(3) 它不自交.

我们现在可以叙述散度定理了.

定理 28.12(散度定理) *设 B 是个三维立体,边界 ∂B 是个简单闭曲面. 已知 $\boldsymbol{F}$ 是个可微向量场,我们则有等式*

$$\iiint_B \operatorname{div}(\boldsymbol{F})\,dxdydz = \iint_{\partial B} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

这个定理的动机(它可以看作格林定理的推广)将在第 29 章中给出. 目前我们只局限于解释这个非常有用的定理.

例 28.13 设 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$. 计算 $\iint_{\partial B}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$,其中 B 是半径为 1 的球(即实心球),中心在原点.

这个实心球的边缘就只是半径为 1 的球面. 读者会注意到,实际上我们在例 28.8 中已计算过这个积分了. 因此这个例题可以作为散度定理的验证:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = 2,$$

因此

$$\iint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{S} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{8}{3}\pi,$$

这是由于球体有体积$\frac{4\pi}{3}$.

例 28.14 设 $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} - 2xz\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$. 计算

$$\iint_{\partial B} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},$$

其中 B 是单位立方体 $B = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, ∂B 为其边缘.

此例中的发散量为

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = 2x,$$

因此

$$\iint_{\partial B} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1.$$

注意,这与我们在例 28.9 中的计算一致.

例 28.15 设 $\boldsymbol{F} = (3x^2z^2 - 2x)\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} - 2xz^3\boldsymbol{k}$. 计算$\iint_{\partial E} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$,其中 ∂E 是椭球体 $E = \{(x,y,z) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leqslant 2\}$ 的边缘.

在这最后一个例子中,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2z^2 - 2x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(-2xz^3)\\ &= 6xz^2 - 2 + 2 - 6xz^2 = 0,\end{aligned}$$

因此$\iint_{\partial E} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$.

§28.4 的习题

求下列向量场的散度.

(1) $\boldsymbol{v} = 2x^3y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

(2) $\boldsymbol{v} = xz^2\boldsymbol{i} + xyz\boldsymbol{j} - 3xz^4\boldsymbol{k}$.

(3) $\boldsymbol{v} = xz\boldsymbol{i} + \cos(y^2z)\boldsymbol{k}$.

(4) $\boldsymbol{v} = ye^x\boldsymbol{j} - \ln(x^2y)\boldsymbol{k}$.

(5) $\boldsymbol{v} = e^{x+y}\boldsymbol{i} - 2\cos(yz)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.　(6) $\boldsymbol{v} = \frac{x}{y}\boldsymbol{i} - \ln\left(\frac{x}{yz}\right)\boldsymbol{j} + e^{z^2}\boldsymbol{k}$.

用散度定理计算下列曲面积分 $\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$.

(7) $\boldsymbol{F} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$,其中 S 为半径为 1 的球面.

(8) $\boldsymbol{F} = 3x^2y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$,其中 S 是单位立方体 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 的表面.

(9) $\boldsymbol{F} = x^4z\boldsymbol{i} - 2xy^2z\boldsymbol{j} + 3xz\boldsymbol{k}$, S 是长方体 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2, -1 \leqslant z \leqslant 1$ 的表面.

(10) $\boldsymbol{F} = 3x^2y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$, S 为顶点在 $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ 和 $(0,0,1)$ 的四面体的表面.

(11) $\boldsymbol{F} = \ln(xy)\boldsymbol{i} + \cos(xz)\boldsymbol{j} - \frac{z}{x}\boldsymbol{k}$, S 是半径为 3,中心为 $(5,5,0)$ 的球面.

(12) $\boldsymbol{F} = 3x\boldsymbol{i} + 2\sin(x^3z)\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$, S 为椭球体 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leqslant 4$ 的表面.

(13) $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, S 为在平面 $z = 2$ 和 $z = -2$ 之间的圆柱体 $x^2 + y^2 \leqslant 9$ 的表面.

(14) 已知有可微向量场 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$, c 为常数,证明

(i) $\operatorname{div}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \operatorname{div}(\boldsymbol{F}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{G})$,

(ii) $\operatorname{div}(c\boldsymbol{F}) = c\operatorname{div}(\boldsymbol{F})$. (15) 设 $\boldsymbol{F}$ 为可微向量场, $g(x,y,z)$ 为可微函数. 证明

$$\operatorname{div}(g\cdot\boldsymbol{F}) = g\cdot\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) + \nabla g\cdot\boldsymbol{F}.$$

(16) 设 f 和 g 为可微函数. 证明

$$\operatorname{div}(\nabla f\times\nabla g) = 0.$$

(17) 已知一个二次可微函数 f,我们定义 f 的拉普拉斯为

$$\nabla^2 f = \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

如果 f 和 g 都是二次可微函数,证明

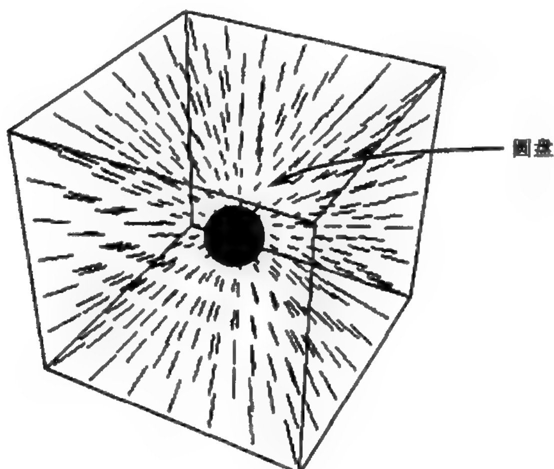
$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f\cdot\nabla g.$$

(18) 称函数 f 是调和的是指如果 $\nabla^2 f = 0$ 成立. 证明函数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为除原点外处处为调和的.

28.5　旋度和旋量

想象向量场 $\boldsymbol{F} = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ 为一个力场,即在空间中每点的一个力. 如果我们放一个圆盘在此空间中,于是便自然地产生了问题:这些力能使圆盘自旋吗?

这个问题并非完全不可理解:如果我们把风力形象化地比作一个作用于飞行的飞机上的向量场,则自旋的影响将决定此飞行是否舒适.



为回答此问题,回想

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

用力学的基本原理可以证明,如果 $\boldsymbol{n}$ 是圆盘的单位法向量,则如果

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \neq 0.$$

此圆盘将自旋. 我们定义一个小圆盘的旋量为公式

$$\text{spin} = \operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 与此圆盘相伴的曲面向量. 我们以一些简单的例子来解释这个概念.

例 28.16(绕轴的自旋) 设 $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ 为一固定向量,$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 为位置向量场(见 §27.1). 向量场

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 z - a_3 y)\boldsymbol{i} + (a_3 x - a_1 z)\boldsymbol{j} + (a_1 y - a_2 x)\boldsymbol{k}$$

的图形显示由哪些向量组成: 它们绕一个固定的向量(现在看作一根轴)$\boldsymbol{a}$ 旋

转.



向量 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$ 绕轴 $\boldsymbol{a}$ 旋转是确定叉积的右手法则(见 §20.6) 的直接推论.

例 28.17　在例 28.16 中设 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{k}$. 知道自旋向量场是

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j},$$

计算一个单位圆盘(面积为 1) 放在 xy - 平面的原点时的旋量.

因为此圆盘的单位法向量就是 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$,所考虑的旋量由下式给出:

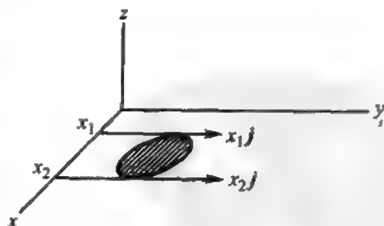
$$\begin{aligned} \text{spin} &= \text{curl}(\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{k} = 2. \end{aligned}$$

例 28.18(位置向量场)　定义为 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 的位置向量场对任何圆盘没有自旋,这是因为

$$\text{curl}(\boldsymbol{r}) = 0.$$

这等于说在圆盘(放在任意位置) 上作用的力抵消了.

例 28.19(平行向量场)　设 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{j}$,形象上看 $\boldsymbol{F}$ 由平行的向量组成. 因为 $\text{curl}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{k} \neq 0$,我们看到位于 xy - 平面中的一个圆盘会发生自旋.



要弄清这个自旋的方向只要注意到,如果 $x_2 > x_1$ 则力向量 $x_2\boldsymbol{j}$ 大于力向量 $x_1\boldsymbol{j}$. 参照右图知旋转方向是反时针的.

例 28.20(梯度向量场)　设

$$\boldsymbol{F} = \nabla\phi(x,y,z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

为一梯度向量场,其位势函数为 ϕ. 由定义,$\text{curl}(\boldsymbol{F})$ 为

$$\text{curl}(\boldsymbol{F}) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\boldsymbol{k}.$$

回想当我们颠倒偏微分顺序时，结果仍保持不变（见 §23.3），我们看到了

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z},\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x},$$

从而 $\text{curl}(\boldsymbol{F})=0$，即梯度向量场没有自旋.

§28.5 的习题

用你的CAS得出下列向量场$\boldsymbol{v}$的图形显示. 对每个向量场$\boldsymbol{v}$计算：当一个单位圆盘放在 xy - 平面上，xz - 平面上和 yz - 平面上的原点时的旋量（准确到符号）.

(1) $\boldsymbol{v}=z\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{k}$.　　(2) $\boldsymbol{v}=-y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{k}$.　　(3) $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$.

(4) $\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{i}$.　　(5) $\boldsymbol{v}=3y\boldsymbol{i}$.　　(6) $\boldsymbol{v}=3z\boldsymbol{i}$.

(7) $\boldsymbol{v}=(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$.　　(8) $\boldsymbol{v}=2xyz\boldsymbol{i}+x^2z\boldsymbol{j}+x^2y\boldsymbol{k}$.

(9) $\boldsymbol{v}=yz\cos(xyz)\boldsymbol{i}+xz\cos(xyz)\boldsymbol{j}+xy\cos(xyz)\boldsymbol{k}$.

(10) 已知可微向量场 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$，k 为常数. 证明(i) $\text{curl}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})=\text{curl}(\boldsymbol{F})+\text{curl}(\boldsymbol{G})$. (ii) $\text{curl}(k\boldsymbol{F})=k\,\text{curl}(\boldsymbol{F})$.

(11) 已知可微向量场 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$，证明

$$\text{div}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})=\boldsymbol{G}\cdot\text{curl}(\boldsymbol{F})-\boldsymbol{F}\cdot\text{curl}(\boldsymbol{G}).$$

(12) 已知可微向量场 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$，证明

$$\nabla(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})=(\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G}+(\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}\times\text{curl}(\boldsymbol{G})+\boldsymbol{G}\times\text{curl}(\boldsymbol{F}).$$

(13) 已知可微向量场 $\boldsymbol{F}$ 和一可微函数 $f(x,y,z)$，证明等式

$$\text{curl}(f\cdot\boldsymbol{F})=f\cdot\text{curl}(\boldsymbol{F})+\nabla f\times\boldsymbol{F}.$$

(14) 假设 $\boldsymbol{F}$ 具有连续的二阶导数. 证明

$$\text{div}(\text{curl}\boldsymbol{F})=0.$$

(15) 已知可微向量场 $\boldsymbol{F}=f_1(x,y,z)\boldsymbol{i}+f_2(x,y,z)\boldsymbol{j}+f_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$，其中每个 f_i 为二次可微. 定义 $\boldsymbol{F}$ 的拉普拉斯为

$$\nabla^2\boldsymbol{F}=\nabla^2f_1\boldsymbol{i}+\nabla^2f_2\boldsymbol{j}+\nabla^2f_3\boldsymbol{k},$$

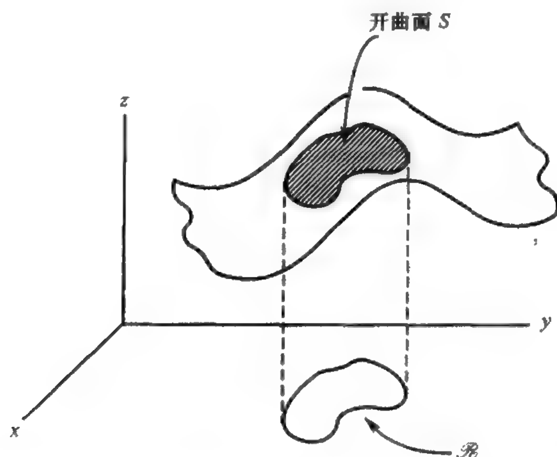
其中 ∇^2f_i 是 §28.4 的习题(17) 中定义的拉普拉斯.

证明

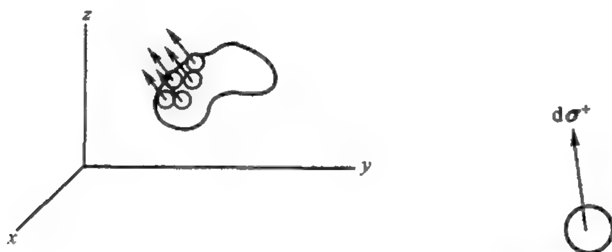
$$\text{curl}(\text{curl}\boldsymbol{F})=\nabla(\text{div}\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}.$$

28.6 斯托克斯定理

在最后这一节中我们再次考虑三维空间中一个开的定向曲面，它是 $(x,y)\in\mathscr{R}$ 的函数 $z=f(x,y)$ 的图像显示，其中 $\mathscr{R}$ 是 xy - 平面中某个有界的单连通区域.



给出一个可微向量场 $\boldsymbol{F}$,我们希望确定 $\boldsymbol{F}$ 在 S 上的总旋量. 按照我们一贯的方法,首先用无穷小圆盘拼接成 S,其中对每个小圆盘 $\mathrm{d}\sigma$ 伴以 $\boldsymbol{k}$ - 正向曲面向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{+}$.

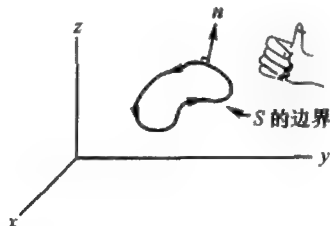


在每个微小的圆盘上的旋量为 $\operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{+}$,而穿过 S 的总旋量应由这些旋量的和的极限给出,即总旋量是曲面积分

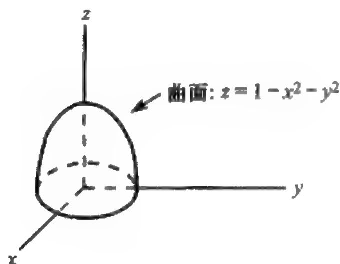
$$\iint_S \operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{+}.$$

斯托克斯定理是个著名的等式,它将上面的积分与围成曲面 S 的曲线(我们以 ∂S 表示)上的曲线积分联系起来. 在叙述此结果之前我们必须讨论曲线 ∂S 的定向. 设 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的一个 $\boldsymbol{k}$ - 正向法向量. 用你右手的大拇指指向 $\boldsymbol{n}$ 的方向,然后让右手绕曲线卷起,则诱导出了 ∂S 的定向. 稍作观察便清楚这个定向(正如下图图示)是逆时针的. 斯托克斯定理说:

$$\iint_S \operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}^+ = \oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$



例 28.21 对抛物体表面 $z = 1 - x^2 - y^2, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 与 $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$ 验证斯托克斯定理.



以 S 表示曲面并注意 ∂S 是 xy - 平面中的单位圆,即

$$\partial S = \{(x,y,0) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

为了计算绕 ∂S 的曲线积分,我们先把它参数化:

$$x = \cos(\theta), y = \sin(\theta), z = 0 (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

因此

$$dx = -\sin(\theta)d\theta, dy = \cos(\theta)d\theta, dz = 0.$$

于是

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{\partial S} (z dx + x dy - y dz)$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^2 d\theta = \pi.$$

另一方面,当将 S 表示为形式

$$x^2 + y^2 - 1 + z = 0$$

时，我们看出 $\boldsymbol{k}$ - 正向曲面向量是

$$d\boldsymbol{\sigma}^{+} = (2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\,dxdy.$$

现在 curl($\boldsymbol{F}$) 由下式给出：

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & -y \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

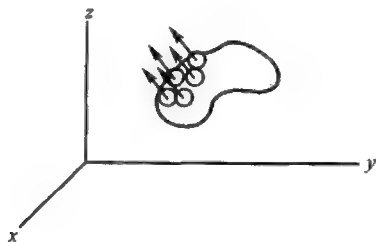
因此

$$\iint_S \operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}^{+} = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (-2x - 2y + 1)\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-2r\cos(\theta) - 2r\sin(\theta) + 1)\,r\,dr\,d\theta = \pi,$$

从而验证了这种情况下的斯托克斯定理.

例 28.22　考虑由 $z^2 = x^2 + y^2$ 给出的锥面，其中 $0 \leqslant z \leqslant 1$. 对 $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ 验证斯托克斯定理.



此例中的锥是函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ 的图像显示. 现在

$$d\boldsymbol{\sigma}^{+} = \frac{-x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z\boldsymbol{k},$$

以及

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 1 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{k}.$$

我们最后得到

$$\iint_S \operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+ = \iint_{x^2+y^2\leq 1} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi.$$

要完成对斯托克斯定理的验证,先对 ∂S 参数化. 这时的 ∂S 是在平面 $z = 1$ 上的半径 1 的圆,参数化为

$$x = \cos(\theta), y = \sin(\theta), z = 1,$$

它使我们能很快地计算所讨论的曲线积分:

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_{\partial S} (-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$$

$$= \int_0^{2\pi} ((\sin(\theta))^2 + (\cos(\theta))^2)\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

作为本章结尾,我们提出一个容易证明的斯托克斯定理的推论.

推论 28.23 *如果 $\boldsymbol{F}$ 是个梯度向量场,则对在一有界区域上一个可微函数 $z = f(x,y)$ 的图像显示的一个定向开曲面 S,我们有*

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0,$$

其中 ∂S 代表 S 的边缘.

证明 当我们回想,只要 $\boldsymbol{F}$ 是个梯度向量场则 $\operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) = 0$(见例28.20),斯托克斯定理立刻给出了这个推论:

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+ = 0.$$

§28.6 的习题

(1) 对曲面 $z = 4 - x^2 - y^2, 0 \leq z \leq 4$ 以及 $\boldsymbol{F} = 2z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$ 验证斯托克斯定理.

(2) 对锥 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 2$ 和 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 验证斯托克斯定理.

(3) 对顶点位于(1,0,0),(0,1,0) 和(0,0,1) 的三角形的曲面和 $\boldsymbol{F} = z^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ 验证斯托克斯定理.

用斯托克斯定理计算下列的曲面积分 $\iint_S \operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+$.

(4) S 为半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, \boldsymbol{F} = 2x^2z\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$.

(5) S 为顶点在(1,0,0),(0, -1,0) 和(0,0,1) 的三角形,$\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{k}$.

利用斯托克斯定理计算下列曲线积分 $\oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

(6) $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,$\partial S$ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$(z 任意) 和平面 $y + z = 3$(x 任意) 的交线.

(7) $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, ∂S 为包围任意简单曲面的简单闭曲线.

(8) 设 S_1, S_2 为具同一边界曲线的两个曲面, 即 $C=\partial S_1=\partial S_2$. 证明如果 S_1 和 S_2 位于 C 的相反的面则

$$\iint_S \mathrm{curl}(\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+ = -\iint_S \mathrm{curl}(\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^-.$$

(9) 设 C 为一条简单曲线. 已知有可微函数 f 和 g, 证明

$$\oint_C (f\nabla g + g\nabla f)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

第二十八章的附加习题

计算下列曲面的曲面面积

(1) S 为抛物面 $z=2-x^2-y^2$ 在 xy - 平面上的那部分.

(2) S 为曲面 $z=x+y^2$ 在顶点为 $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ 的三角形上面的那部分.

(3) S 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 在 $\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant 6$ 的部分.

(4) S 为曲面 $y^2=x$ 在 $z=0, z=4, y=1, y=2$ 之间的部分.

计算下列曲面 S 和向量场 $\boldsymbol{F}$ 的曲面积分 $\iint_S \mathrm{curl}(\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^+$ 和 $\iint_S \mathrm{curl}(\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^-$.

(5) $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, S 为习题(1)中的曲面.

(6) $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, S 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 在平面 $z=4$ 下面的那部分.

(7) $\boldsymbol{F}=x^2\boldsymbol{i}+y^2x\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, S 为曲面 $z=xy^2$ 位于矩形 $0\leqslant x\leqslant 2$, $-1\leqslant y\leqslant 1$ 上面的那部分.

(8) $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, S 为圆柱面 $x^2+z^2=a^2$ 在第一卦限中处于平面 $x=0, x=9, z=y$ 和 $z=2y$ 之间的那部分.

(9) $\boldsymbol{F}=(x+y)\boldsymbol{i}+(y+z)\boldsymbol{j}+(z+x)\boldsymbol{k}$, S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限中的那部分.

求下列向量场的散度. 用你的 CAS 计算以检验你的答案.

(10) $\boldsymbol{F}=\mathrm{e}^{xy^2}\boldsymbol{i}-\cos(y)\boldsymbol{j}+\sin^2(x)\boldsymbol{k}$.　(11) $\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$.

(12) $\boldsymbol{F}=\ln(x)\boldsymbol{i}+\mathrm{e}^{xy}\boldsymbol{j}+\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)\boldsymbol{k}$.

用散度定理计算下列曲面积分.

(13) $\boldsymbol{F}=\mathrm{e}^{xy}\boldsymbol{i}-\cos(y)\boldsymbol{j}+\sin^2(x)\boldsymbol{k}$, S 是由坐标平面和 $x=1, y=1, z=1$ 围成的立方体的表面.

(14) $\boldsymbol{F}=z^3\boldsymbol{i}-x^3\boldsymbol{j}+y^3\boldsymbol{k}$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

对每个向量场 $\boldsymbol{v}$ 计算一个放置于 xy - 平面, xz - 平面和 yz - 平面内的原点处的单位圆盘的旋量(准确到符号). 用你的 CAS 得出向量场 $\boldsymbol{v}$ 的图像显示.

(15) $\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$.

(16) $\boldsymbol{v} = e^{xy^2}\boldsymbol{i} - \cos(y)\boldsymbol{j} + \sin^2(x)x\boldsymbol{k}$.

(17) $\boldsymbol{v} = \ln(x)\boldsymbol{i} + e^{xyz}\boldsymbol{j} + \arctan\left(\dfrac{x}{z}\right)\boldsymbol{k}$

用斯托克斯定理计算下列曲面积分$\iint\limits_S \operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}^+$.

(18) $\boldsymbol{F} = 3z\boldsymbol{i} + 4xy\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$,其中 S 是抛物面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 在 xy - 平面上面的部分.

(19) $\boldsymbol{F} = (z+\sin(x))\boldsymbol{i} + (x+y)\boldsymbol{j} + (y+e^x)\boldsymbol{k}$,$S$ 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 $z = 3$ 下面的部分.

第二十九章　微分形式:概论

29.1　微分形式和楔积

迄今我们已经遇到过的高维积分定理——格林定理、散度定理和斯托克斯定理,初看起来相当不同. 现代数学的成就之一是发展了一种理论,可用来证明这些定理都是一个微积分基本定理的极为广泛形式的特殊情形. 回忆一下,微积分基本定理的本质就是说微分和积分是互逆的过程,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 + C) = 2x, \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C \tag{29.1}$$

这个基本的观察可以推广到高维情形,并在这样做时,我们就会达到称之为微分形式理论的这个统一理论.

要引起对这个理论的兴趣我们先考查已经出现过的种种高维积分. 曲线积分具有形式

$$\int_C (P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z), \tag{29.2}$$

最一般的曲面积分由下式给出:

$$\iint_S (P(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + Q(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x), \tag{29.3}$$

而三重积分有形式

$$\iiint_B P(x,y,z)\,dxdydz. \tag{29.4}$$

出现在这些积分里面的表达式

$$\begin{aligned}&P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,\\&P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dydz + R(x,y,z)dzdx,\\&P(x,y,z)dxdydz\end{aligned} \tag{29.5}$$

都被称做(分别为1,2,3维的)**微分形式**. 微分形式的理论将把这些表达式按统一的方式分类,并将提供一个强有力的工具来观察作为互逆过程的高维积分与微分.

定义 0-形式是三个变量 x,y,z 的任何一个可微函数 $f(x,y,z)$.

称表达式 dx,dy,dz 为微分.

定义 1-形式是具下列形式的表达式

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz, \tag{29.6}$$

其中 P,Q,R 为0-形式.

注 给出两个1-形式

$$\omega_i = P_i(x,y,z)dx + Q_i(x,y,z)dy + R_i(x,y,z)dz,(i=1,2) \tag{29.7}$$

我们定义它们的和与差分别为

$$\begin{aligned}\omega_1 \pm \omega_2 = &(P_1(x,y,z) \pm P_2(x,y,z))dx\\&+(Q_1(x,y,z) \pm Q_2(x,y,z))dy\\&+(R_1(x,y,z) \pm R_2(x,y,z))dz.\end{aligned} \tag{29.8}$$

另外,如果 $f=f(x,y,z)$ 是个0-形式, $\omega = Pdx+Qdy+Rdz$ 是个1-形式,我们定义

$$f\cdot\omega = f\cdot Pdx + f\cdot Qdy + f\cdot Rdz. \tag{29.9}$$

在定义了1-形式的加法和减法,以及一个0-形式乘以1-形式后,我们自然想去定义两个1-形式相乘. 我们将要定义的这个运算被称做**楔积**,以 $\wedge$ 表示(读作"楔"). 楔两个1-形式的结果将是一个**2-形式**.

考虑由形式表达式

$$du \wedge dv \quad (du,dv \in \{dx,dy,dz\}) \tag{29.10}$$

的和与差组成的集合,它们遵从下列等式

$$dx\wedge dy = -dy\wedge dx, dy\wedge dz = -dz\wedge dy, dz\wedge dx = -dx\wedge dz \tag{29.11}$$

以及

$$dx\wedge dx = 0, dy\wedge dy = 0, dz\wedge dz = 0. \tag{29.12}$$

我们可以把楔积扩张到任意的1－形式ω_1,ω_2,并考虑2－形式

$$\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{29.13}$$

要做到这一点只要我们列出下面的条件:对任意三个1－形式ω_1,ω_2,ω有

$$(\omega_1+\omega_2)\wedge\omega=\omega_1\wedge\omega+\omega_2\wedge\omega,$$
$$\omega\wedge(\omega_1+\omega_2)=\omega\wedge\omega_1+\omega\wedge\omega_2, \tag{29,14}$$

而对一已知0－形式$f(x,y,z)$有

$$f\cdot\omega_1\wedge\omega_2=\omega_1\wedge f\cdot\omega_2 \tag{29.15}$$

即可.

例29.1 展开并简化楔积

$$((x^2-2y)\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}z)\wedge y\mathrm{d}x.$$

我们用(29.10)到(29.15)简化这个楔积:

$$\begin{aligned}&((x^2-2y)\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}z)\wedge y\mathrm{d}x\\&=(x^2-2y)\mathrm{d}x\wedge y\mathrm{d}x+(-xy^2)\mathrm{d}z\wedge y\mathrm{d}x\\&=y(x^2-2y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x-xy^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\&=xy^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

例29.2 展开并简化楔积:

$$(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\wedge(x^2y\mathrm{d}x+y^2x\mathrm{d}z). \tag{29.16}$$

这个例题相似于前面的一个:

$$\begin{aligned}&(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\wedge(x^2y\mathrm{d}x+y^2x\mathrm{d}z)\\&=(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\wedge x^2y\mathrm{d}x+(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\wedge y^2x\mathrm{d}z\\&=-x^3y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+y^3x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z-y^2x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{29.17}$$

上面的例子给出了下面定义的动机.

定义 *一个标准2－形式是形如*

$$P(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+Q(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+R(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x, \tag{29.18}$$

的表达式,其中P,Q,R为0－形式.

注 (1)任一个2－形式都可用楔积的等式变换为标准2－形式.例如2－形式

$$\begin{aligned}&x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x-3x^2yz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(xy^2+z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\\&=-x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-3x^2yz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-(xy^2+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2)应该注意到,楔积可以按向量叉积来依葫芦画瓢,只要把$\mathrm{d}x$换为$\boldsymbol{i}$,$\mathrm{d}y$换为$\boldsymbol{j}$,$\mathrm{d}z$换为$\boldsymbol{k}$;这时楔积所满足的等式转换成了叉积所满足的等式.

这个过程的下一个对象是作一个2－形式和1－形式的楔积(记住楔积的

等式)，并得到一个 **3 - 形式**. 由于任一 2 - 形式都可以写成标准形式，我们可以限制在下面的楔积

$$(P\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + Q\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge R\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) \wedge (g_1\mathrm{d}x + g_2\mathrm{d}y + g_3\mathrm{d}z). \tag{29.19}$$

利用等式(29.10)和(29.11)再加上明确要求

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) \tag{29.20}$$

对任何三个 1 - 形式 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 成立，我们看到不等于零的唯一情形为形式

$$f(x,y,z)\mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2 \wedge \mathrm{d}u_3, (\mathrm{d}u_i \in \{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}, i = 1,2,3) \tag{29.21}$$

其中 $\mathrm{d}u_i$ 互不相同. 因为我们总可以用(29.11)交换 $\mathrm{d}u_i$ 的顺序，故下面的定义是合适的.

定义　**一个标准的 3 - 形式**是形如

$$f(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \tag{29.22}$$

的表达式，其中 f 是 0 - 形式.

例 29.3　将楔积

$$(y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) \wedge (z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$$

写成标准形式

这里我们再次利用楔积的等式：

$$\begin{aligned}
&(y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) \wedge (z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) \\
&= y^2\mathrm{d}x \wedge (z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) + x\mathrm{d}y \wedge (z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) \\
&= y^2\mathrm{d}x \wedge z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x \wedge x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&\quad + x\mathrm{d}y \wedge z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - x\mathrm{d}y \wedge x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= 0 - y^2\mathrm{d}x \wedge x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + 0 + 0 \\
&= -xy^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned} \tag{29.23}$$

例 29.4　将 3 - 形式 $x^3yz^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$ 写为标准形式.

在此例题中我们反复用(29.11)

$$\begin{aligned}
x^3yz^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x &= x^3yz^2(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x \\
&= -x^3yz^2(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}x \\
&= -x^3yz^2\mathrm{d}y \wedge (\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) \\
&= x^3yz^2\mathrm{d}y \wedge (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z) \\
&= x^3yz^2(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}z \\
&= -x^3yz^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned} \tag{29.24}$$

§29.1 的习题

展开并简化下列楔积. 用标准形式表达你的最后答案.

(1) $(dx + dy + dz) \wedge (dx + dy + dz)$.

(2) $(dx - xdy + zdz) \wedge dy$.

(3) $((x^2 - 2yz)dx + (x - 3y)dz) \wedge (dx \wedge dy)$.

(4) $(y^3dx + zdy) \wedge (xdx \wedge dy - 3y^2dy \wedge dx)$.

(5) $dx \wedge (y^2dx \wedge dy - 3x^2dx \wedge dz + 2dz \wedge dy)$.

(6) $(e^ydx) \wedge (x^3ydx - e^xdy + \cos(x^2yz)dz)$.

(7) $(e^{xy}dx - 3z^2dy + xydz) \wedge (2dx - 3dy + e^ydz)$.

(8) $(dx \wedge dz) \wedge (dy \wedge dx)$.

(9) $(dx \wedge xdy \wedge zdz) \wedge dx$.

(10) $3y^3dz \wedge (dx \wedge dy - dy \wedge dz + 2dx \wedge dz)$.

29.2　d - 算子

本节我们要定义 d - 算子(以 d 表示),它像一个高维空间中导数的作用. d - 算子定义在 n - 形式上,其中 $n = 0,1,2$,而且当作用于一个 n - 形式时给出了一个 $(n+1)$ - 形式.

定义　设 $f(x,y,z)$ 为 0 - 形式. 定义

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \tag{29.25}$$

已知 1 - 形式 $\rho = Pdx + Qdy + Rdz$,我们让

$$d\rho = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz. \tag{29.26}$$

最后,当 $\omega = Pdx \wedge dy + Qdy \wedge dz + Rdz \wedge dx$ 时,d - 算子被定义为

$$d\omega = dP \wedge (dx \wedge dy) + dQ \wedge (dy \wedge dz) - dR \wedge (dz \wedge dx). \tag{29.27}$$

例 29.5　设 $f(x,y,z) = x^2yz^4$. 计算 df.

我们有

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 2xyz^4dx + x^2z^4dy + 4x^2yz^3dz.$$

例 29.6　设 $\rho = ydx - xzdy$. 计算 $d\rho$.

这时

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\rho &= \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - \mathrm{d}(xz) \wedge \mathrm{d}y \\
&= -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - (z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}y \\
&= (-1-z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned} \tag{29.28}
$$

例 29.7 设 $\omega = x^3yz^5\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. 计算 $\mathrm{d}\omega$.

再次按定义我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(x^3yz^5) \wedge (\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) \\
&= (3x^2yz^5\mathrm{d}x + x^3z^5\mathrm{d}y + 5x^3yz^4\mathrm{d}z) \wedge (\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) \\
&= 3x^2yz^5\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned} \tag{29.29}
$$

例 29.8 设 $\rho = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 为任一 1－形式. 计算 $\mathrm{d}\rho$.

尽管此例题具一般性，我们仍可以得出一个紧凑的公式.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\rho &= \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&\quad + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{29.30}
$$

§29.2 的习题

对下面的微分形式 ω 计算 $\mathrm{d}\omega$.

(1) $\omega = xyz$.

(2) $\omega = x^3yz^2$.

(3) $\omega = \cos(xz^2)$.

(4) $\omega = e^z$.

(5) $\omega = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$.

(6) $\omega = x^2y\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$.

(7) $\omega = e^y\mathrm{d}x - e^x\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$.

(8) $\omega = xyz\mathrm{d}x - e^{x+y+z}\mathrm{d}z$.

(9) $\omega = x^3y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$.

(10) $\omega = \cos(xyz)(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$.

(11) $\omega = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

(12) $\omega = 3x^2y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

(13) 设 ω 和 η 为 k－形式，$k = 0,1,2$. 证明

(i) $\mathrm{d}(\omega + \eta) = \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\eta$.

(ii) $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

29.3 广义斯托克斯定理

在 §29.2 中定义了 d − 算子后,我们现在要叙述这个广泛的定理,从中可以推导出格林定理,散度定理和斯托克斯定理. 设 ω 是个标准形式的微分 n − 形式($n = 1,2,3$). 已知一个 n 维几何体 Ω(即一条曲线,一个曲面,或立体),我们现在将赋予积分

$$\int_{\Omega}\omega$$

一个明确的意义.

情形(1) 如果 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 为标准 1 − 形式,Ω 为曲线,则

$$\int_{\Omega}\omega = \int_{\Omega}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z) \tag{29.31}$$

被定义为曲线积分.

情形(2) 如果 $P\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + Q\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + R\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ 为 2 − 形式,Ω 为二维曲面则

$$\int_{\Omega}\omega = \iint_{\Omega}(P\mathrm{d}x\mathrm{d}y + Q\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\mathrm{d}z\mathrm{d}x), \tag{29.32}$$

其中我们去掉了积分中的楔积并在曲面 Ω 上计算 0 − 形式 P,Q,R.

情形(3) 如果 $\omega = f\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 是个标准 3 − 形式,Ω 是个三维立体,我们定义

$$\int_{\Omega}\omega = \iiint_{\Omega}f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

为此三重积分,这里的楔积又被去掉了.

微积分基本定理的一般形式叙述为(在适当的假定下)

$$\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Omega}\omega, \tag{29.34}$$

其中 $\partial\Omega$ 是 Ω 的边缘.

例 29.9 设 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$,$S$ 为一简单曲面,其边界 ∂S 是条光滑的不自交的曲线. 从(29.34)推导出**斯托克斯定理**.

回忆方程(29.30),

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x. \tag{29.35}$$

我们推导出(29.34)取形式

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\partial S}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z). \tag{29.36}$$

方程(29.36)实际上是推广了的格林定理即斯托克斯定理. 要推出 §27.4 的定理形式只需考虑 1 - 形式 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$,而 P,Q 不包含变量 z,即 P,Q 为 x,y 的函数.

例 29.10 设 $\omega = P\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + Q\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + R\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ 为 2 - 形式,并设 Ω 为一个三维立体,其边缘 $\partial\Omega$ 为简单闭曲面. 推导散度定理.

这里我们再次先计算 d - 算子对所讨论的微分形式的影响:

$$\mathrm{d}\omega=\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$=\left(\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z. \tag{29.37}$$

一般的基本定理(29.34)现在给了我们

$$\iint_{\partial\Omega}(P\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Q\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}z\mathrm{d}x)=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

它就是散度定理的一种形式.

注 单变量函数的微积分基本定理

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$$

也可以按下面的方式看作是(29.34)的一个特殊情形. 如果我们把 $\omega = f(x)$ 看作是 0 - 形式,则 $\mathrm{d}\omega = f'(x)\mathrm{d}x$. 设 Ω 是一维直线段 $a\leqslant x\leqslant b$,则 Ω 的边缘由两个端点 a,b 组成,我们仍记其为 $\partial\Omega$.



在这个最后的情形中广义的基本定理可以说成是

$$\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\omega=f(b)-f(a).$$

假如界定了 0 - 形式的积分由

$$\int_{\partial\Omega}\omega = f(b)-f(a) \tag{29.38}$$

给出,我们便能解释这些等式了.

例 29.11(坐标变换)　考虑二重积分$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\mathscr{R}$为一个二维区域. 用楔积证明在坐标变换

$$x = g_1(u,v), y = g_2(u,v) \tag{29.39}$$

下此二重积分成为

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{R}^*} f^*(u,v)\left(\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial g_2}{\partial v} - \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial u}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{29.40}$$

其中$f^*(u,v) = f(g_1(u,v), g_2(u,v))$,$\mathscr{R}^*$ 是 $\mathscr{R}$ 在变换下的像.

注意,在这里我们实际上是在重新验证命题 25.14. 读者应该看出原先(29.40)的推导是较长的. 我们能容易地用微分形式得到这个结果(从而不必死记公式)是此理论威力的生动显示.

由于此变换由 $x = g_1(u,v)$,$y = g_2(u,v)$ 给出,我们有

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial g_1}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial g_1}{\partial v}\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial g_2}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial g_2}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

因此最后有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial g_1}{\partial v}\mathrm{d}v\right) \wedge \left(\frac{\partial g_2}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial g_2}{\partial v}\mathrm{d}v\right)\\ &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial g_2}{\partial v} - \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial u}\right)\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.\end{aligned}$$

第二十九章的附加习题

展开并化简下列的楔积. 用标准形式表达你最后的答案.

(1) $(x^2y\,\mathrm{d}x + y^2x\,\mathrm{d}y + z^y\,\mathrm{d}z) \wedge (xy^2\,\mathrm{d}x + yx^2\,\mathrm{d}y + z^y\,\mathrm{d}z)$.

(2) $(\ln(x^2)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{yx}\,\mathrm{d}y + \cos(z^y)\,\mathrm{d}z) \wedge (xy^2\,\mathrm{d}x + yx^2\,\mathrm{d}y)$.

(3) $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z) \wedge (x\,\mathrm{d}x + yx^2\,\mathrm{d}y)$.

对下列微分形式 ω 计算 $\mathrm{d}\omega$.

(4) $\omega = \cos(y^2)$, $\mathrm{d}x = \sin(x^2)\,\mathrm{d}y$.　　(5) $\omega = 6z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - xy\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$.

(6) $\omega = \mathrm{e}^z\cos(y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}y + \mathrm{e}^x\tan(x)\,\mathrm{d}z$.

(7) $\omega = (y-z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - (z-x)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (x-y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

称一个微分形式 ω 是闭的指的是 $d\omega=0$. 进而,称 ω 是恰当的是说,如果存在一个微分形式 ψ 使得 $d\psi = \omega$. 确定下列中哪一个是闭的,哪一个是恰当的或者两者都不是.

(8) $\omega = yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$.

(9) $\omega = x\mathrm{d}x + x^2y^2\mathrm{d}y + yz\mathrm{d}z$.

(10) $\omega = 2xy^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + z\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

(11) $\omega = \cos(y^2)\mathrm{d}x - \sin(x^2)\mathrm{d}y$.

(12) $\omega = y\mathrm{d}x + (x+3y^2)\mathrm{d}y$.

(13) $\omega = 2xy^3\mathrm{d}x + (1+x^2y^2)\mathrm{d}y$.

三个微分形式 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 被称做线性无关的当且仅当 $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$. 在下面的习题中确定这些微分形式是否无关.

(14) $\omega_1 = \mathrm{d}x, \omega_2 = \mathrm{d}y, \omega_3 = \mathrm{d}z$.

第三十章　傅里叶级数

30.1　周期函数

设$f(x)$是个定义域为实数集$\mathbb{R}$的函数. 固定一个数ω. 我们称$f(x)$为以ω为周期的**周期函数**是说如果对所有$x \in \mathbb{R}$有

$$f(x+\omega) = f(x).$$

周期ω的周期函数的研究可立即被化为周期1的周期函数的研究(我们将简单地指称其为**周期的**),其方法如下. 已知$f(x)$为周期ω的函数,定义一个新函数

$$g(x) = f(\omega x).$$

可看出$g(x)$是周期的(即具周期1),而且关于$f(x)$的任何问题都可以化为关于$g(x)$的问题.

最本质的周期函数为三角函数

$$\cos(2\pi nx), \sin(2\pi nx), (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{30.1}$$

一个著名的定理(归功于傅里叶)说, 任意一个可微周期函数可以表示为(30.1)的这些基本周期函数的线性组合(即带系数的和).

例30.1　我们可以表达周期函数$\cos^2(2\pi x)$为线性组合

$$\cos^2(2\pi x) = \frac{1+\cos(4\pi x)}{2}.$$

例 30.2 将 $\cos^3(2\pi x)$ 表达为基本周期函数(30.1) 的线性组合.

在这里我们应用欧拉公式(见 §19.7),它表示

$$e^{2\pi ix} = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x),$$

由此看出

$$\begin{aligned}(e^{2\pi ix})^3 &= (\cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x))^3 \\ &= \cos^3(2\pi x) + 3i\cos^2(2\pi x)\sin(2\pi x) \\ &\quad - 3\cos(2\pi x)\sin^2(2\pi x) - i\sin^3(2\pi x).\end{aligned}$$

但是

$$(e^{2\pi ix})^3 = e^{6\pi ix} = \cos(6\pi x) + i\sin(6\pi x).$$

使最后面的这两个表达式的实部相等,我们看到

$$\cos^3(2\pi x) - 3\cos(2\pi x)\sin^2(2\pi x) = \cos(6\pi x).$$

由于

$$\sin^2(2\pi x) = 1 - \cos^2(2\pi x),$$

我们推导出

$$4\cos^3(2\pi x) - 3\cos(2\pi x) = \cos(6\pi x),$$

即

$$\cos^3(2\pi x) = \frac{1}{4}(3\cos(2\pi x) + \cos(6\pi x)).$$

可以证明,在进行各种巧妙的处理(类似于在例 30.2 中所用的) 后,任意用函数 $\cos(2\pi x)$ 或 $\sin(2\pi x)$ 表达的多项式可以表示为基本函数(30.1) 的有限线性组合.

傅里叶级数的理论是上述所观察到的事实的一个推广,推广到了任意周期函数. 为了给出一个清晰的表述(并避免大量的记号),我们利用复周期函数

$$e^{2\pi inx} = \cos(2\pi nx) + i\sin(2\pi nx), (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{30.2}$$

因为

$$\cos(2\pi nx) = \frac{1}{2}(e^{2\pi inx} + e^{-2\pi inx}),$$

$$\sin(2\pi nx) = \frac{1}{2i}(e^{2\pi inx} - e^{-2\pi inx}),$$

函数(30.2) 也可以用来构造任意周期函数.

一个

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx} \tag{30.3}$$

类型的无穷级数被称做**傅里叶级数**. 观察等式

$$|e^{2\pi inx}| = |\cos(2\pi nx) + i\sin(2\pi nx)| = \sqrt{\cos^2(2\pi nx) + \sin^2(2\pi nx)} = 1,$$

它意味着当

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n e^{2\pi inx}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$$

收敛时级数(30.3)绝对收敛. 这时(30.3)收敛于函数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx},$$

由于它是基本周期函数(30.2)的线性组合故它必是周期的.

命题 30.3　设 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx}$ 绝对收敛于函数 $f(x)$. 于是

$$a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx$$

是函数 $f(x)$ 的平均值.

证明　此命题基于下列计算:

$$\int_0^1 e^{2\pi inx}dx = \begin{cases} 1, & \text{如果 } n = 0, \\ 0, & \text{如果 } n = \pm 1, \pm 2, \cdots. \end{cases}$$

立刻由此得到

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx}dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^1 e^{2\pi inx}dx = a_0.$$

命题 30.4　假设和 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx}$ 绝对收敛于可积函数 $f(x)$. 于是

$$a_n = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx.$$

注　观察与泰勒级数的类比性:泰勒级数的系数由取微分得到,傅里叶系数由积分计算.

证明　这里只需计算所考虑的积分.

$$\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx = \int_0^1 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2\pi imx}\right)e^{-2\pi inx}dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \int_0^1 e^{-2\pi i(m-n)x}dx = a_n,$$

这是因为最后的积分除去 $m = n$ 都为0.

§30.1 的习题

(1) 表示 $(\sin 2\pi x)^3$ 为 $\sin(2\pi nx)$ 或 $\cos(2\pi nx)$,或者两者,$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 的有限线性组合.

(2) 表示多项式 $2 - \sin(2\pi x) + 3\sin^2(2\pi x) + 2\sin^3(2\pi x)$ 为函数 $\sin(2\pi nx)$ 或 $\cos(2\pi nx)$,或者两者,$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 的有限线性组合.

(3) 表示 $\cos^5(2\pi nx)$ 为函数 $\sin(2\pi nx)$ 或 $\cos(2\pi nx)$,或者两者,$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 的有限线性组合.

(4) 证明对整数 m,n,除去 $m = n$ 外,

$$\int_0^1 \cos(2\pi mx)\cos(2\pi nx)\,dx = 0.$$

(5) 证明对整数 m,n,

$$\int_0^1 \cos(2\pi mx)\sin(2\pi nx)\,dx = 0.$$

(6) 证明对整数 m,n,除去 $m = n$,有

$$\int_0^1 \sin(2\pi mx)\sin(2\pi nx)\,dx = 0.$$

(7) 计算积分

$$\int_0^1 (\cos(2\pi nx))^2\,dx, \int_0^1 (\sin(2\pi nx))^2\,dx,$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

30.2 周期函数的傅里叶展开

我们在 §30.1 中表明,如果傅里叶级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}$$

收敛,则它必定收敛于一个周期函数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}.$$

更进一步,如果 $f(x)$ 可积,则我们必有

$$a_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x}\,dx.$$

问题仍在于是否其逆也对.

问题　每个可积周期函数能否表达为基本周期函数 $e^{2\pi inx}$ 的线性组合?

对此问题的答案被傅里叶在下面引人注目的定理中一举拿下.

定理 30.5　*设 $f(x)$ 是个无限可微的周期函数. 设*

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx.$$

于是傅里叶级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

绝对收敛于函数 $f(x)$.

注　上述定理中的假设 f 为无限可微可以大大地减弱. 例如, 对满足使 $\int_0^1 |f(x)|dx$ 有定义并有限的 $f(x)$, 定理也成立.

证明　证明分四步进行.

步骤 1　先证明级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

确定绝对收敛于某个 x 的函数. 绝对收敛性只要我们证明对所有 n 和某个常数 $c > 0$ 有

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{c}{n^2}$$

就立即得到. 为了验证这个上界我们先对定义 $\hat{f}(n)$ 的积分进行两次分部积分:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx\\ &= \int_0^1 f'(x)\frac{e^{-2\pi inx}}{2\pi in}dx\\ &= \int_0^1 f''(x)\frac{e^{-2\pi inx}}{(2\pi in)^2}dx.\end{aligned}$$

对后面一个等式取绝对值, 便有

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{c}{n^2},$$

其中

$$c = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 |f''(x)|dx$$

(这里隐含着使用了一个容易验证的事实, 即一般说来, 如果 $f(x)$ 是个可微函

数,则$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

步骤 2 现在断言,对任何周期的和无限可微的函数f,只要证明

$$f(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \tag{30.4}$$

就可以了. 要明白这一点,我们固定一个数x_0,$0 < x_0 < 1$,并定义函数g为

$$g(x) = f(x + x_0).$$

函数$g(x)$(称其为f的x_0平移)是周期和无限可微的,因此如果(30.4)对任意函数都成立,我们则有

$$g(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n).$$

但$g(0) = f(x_0)$,因而

$$\begin{aligned}
\hat{g}(n) &= \int_0^1 g(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(x + x_0)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\mathrm{d}x \text{(换元:} x \to x - x_0\text{)} \\
&= \int_{x_0}^{x_0+1} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n(x-x_0)}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{2\pi i n x_0}\int_{x_0}^{x_0+1} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{2\pi i n x_0}\hat{f}(n).
\end{aligned}$$

我们最后有

$$f(x_0) = g(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{2\pi i n x_0}.$$

注 上面论证中的最后等式实际上是下述原理的一个特殊情况:如果f是周期函数,α为实数,则

$$\hat{f}(n) = \int_\alpha^{\alpha+1} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\mathrm{d}x.$$

这可通过微积分基本定理对$I_n(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+1} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\mathrm{d}x$作关于$\alpha$的微分来验证:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I_n(\alpha) = f(\alpha + 1)\mathrm{e}^{-2\pi i n(\alpha+1)} - f(\alpha)\mathrm{e}^{-2\pi i n\alpha} = 0.$$

我们的结论是$I_n(\alpha)$为与α无关的常数(见命题 7.3),从而它必定等于$I_n(0) = \hat{f}(n)$,对任意α成立.

步骤 3 我们可以假定 $f(0)=0$：如果不是如此则可考虑新函数 $f(x)-f(0)$，它在 0 取 0 并为周期且无限可微的.

步骤 4 现在我们已化到考虑一个函数 $f(x)$，它是周期的，无限可微的，并在 0 取 0 值. 回想步骤 2，我们只需要证明

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)=0. \tag{30.5}$$

由于 $f(0)=0$，我们可以考虑一个新函数，它由下面等式定义：

$$g(x)=\frac{f(x)}{1-e^{2\pi ix}},$$

其中

$$g(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-e^{2\pi ix}}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{-2\pi ie^{2\pi ix}}=\frac{f'(0)}{-2\pi i},$$

这是由洛必达法则得到的（见 §19.8）. 我们看到，由定义，$g(x)$ 自己是周期和无限可微的. 现在

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)&=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx\\&=\int_0^1(1-e^{2\pi ix})\cdot g(x)\cdot e^{-2\pi inx}dx\\&=\int_0^1 g(x)e^{-2\pi inx}dx-\int_0^1 g(x)e^{-2\pi i(n-1)x}dx\\&=\hat{g}(n)-\hat{g}(n-1).\end{aligned}$$

然而

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\hat{g}(n)-\hat{g}(n-1))=0,$$

这是因为上式后面的和是一个缩叠和，即所有的项都相互消去：

$$\cdots+(\hat{g}(0)-\hat{g}(-1))+(\hat{g}(1)-\hat{g}(0))+(\hat{g}(2)-\hat{g}(1))+\cdots,$$

从而完成了证明.

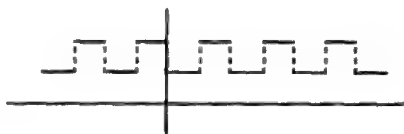
30.3 例子

例 30.6 画出周期的方形波函数 $f(x)$，它在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的定义为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{如果 } 0\leqslant x<\frac{1}{2}\\ 1, & \text{如果 } \frac{1}{2}\leqslant x<1\end{cases},$$

而在其他地方满足周期性关系 $f(x) = f(x+1)$. 展开 $f(x)$ 为傅里叶级数.

画此方形波于下.



要计算这个傅里叶展开式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

我们先计算 $\hat{f}(0)$：

$$\hat{f}(0) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx = \frac{3}{4}.$$

现计算 $n \neq 0$ 的 $\hat{f}(n)$：

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} e^{-2\pi i n x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \frac{e^{-\pi i n} - 1}{-4\pi i n} + \frac{1 - e^{-\pi i n}}{-2\pi i n} \\ &= \frac{e^{-\pi i n} - 1}{4\pi i n},\end{aligned}$$

因此

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} 0, & n\text{ 为偶数且 } n \neq 0, \\ -\dfrac{1}{2\pi i n}, & n\text{ 为奇数}. \end{cases}$$

我们最后有

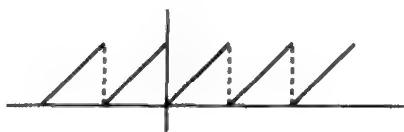
$$f(x) = \frac{3}{4} - \sum_{n\text{奇数}} \frac{1}{2\pi i n} e^{2\pi i n x}$$

例 30.7 画出锯齿函数 $f(x)$ 的图, $f(x)$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上定义为

$$f(x) = x$$

而其余部分满足周期关系 $f(x) = f(x+1)$. 展开 $f(x)$ 为傅里叶级数.

画锯齿函数于下.



傅里叶系数由下面给出：

$$\hat{f}(0) = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

而对 $n \neq 0$,用分部积分给出了

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_0^1 x\mathrm{e}^{-2\pi inx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x\mathrm{e}^{-2\pi inx}}{-2\pi in}\Bigg|_0^1 - \int_1^0 \frac{\mathrm{e}^{-2\pi inx}}{-2\pi in}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{-2\pi in}.\end{aligned}$$

因此

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n\neq 0}\frac{1}{2\pi in}\mathrm{e}^{2\pi inx}.$$

例 30.8 画出周期的三角波函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}, \\ 1 - x, & \dfrac{1}{2} \leqslant x < 1. \end{cases}$$

用有限傅里叶级数

$$\begin{aligned}f(x) \approx \hat{f}(0) &+ \hat{f}(1)\mathrm{e}^{2\pi ix} + f(-1)\mathrm{e}^{-2\pi ix} + \hat{f}(2)\mathrm{e}^{4\pi ix} \\ &+ \hat{f}(-2)\mathrm{e}^{-4\pi ix} + \hat{f}(3)\mathrm{e}^{6\pi ix} + \hat{f}(-3)\mathrm{e}^{-6\pi ix}\end{aligned}$$

近似 $f(x)$.

将 $f(x)$ 的图像与上面的有限傅里叶级数的图像叠放一起来比较其图形显示.

三角波函数被画出如下.



这个函数的傅里叶系数为

$$\hat{f}(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

当 $n \neq 0$,

$$\hat{f}(n) = \int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\mathrm{d}x.$$

后一个积分可用替换 $x \to 1-x$ 简化:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^0 - x\mathrm{e}^{2\pi i n x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{e}^{2\pi i n x}\mathrm{d}x.$$

因而

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_0^{\frac{1}{2}} x(\mathrm{e}^{-2\pi i n x} + \mathrm{e}^{2\pi i n x})\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos(2\pi n x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2x\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\cos(\pi n) - 1}{4\pi^2 n^2},\end{aligned}$$

从而最后得到

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } n \text{ 为偶数且 } n \neq 0, \\ -\dfrac{1}{2\pi^2 n^2}, & \text{如果 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

所讨论的有限傅里叶级数因此为

$$\begin{aligned}\sum_{-3 \leqslant n \leqslant 3} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{2\pi i n x} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi^2}(\mathrm{e}^{2\pi i x} + \mathrm{e}^{-2\pi i x}) - \frac{1}{18\pi^2}(\mathrm{e}^{6\pi i x} + \mathrm{e}^{-6\pi i x}) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\cos(2\pi x)}{\pi^2} - \frac{\cos(6\pi x)}{9\pi^2}.\end{aligned} \tag{30.6}$$

当我们把(30.6)的图像与三角波的图像叠置在一起时,给出了下面的显示.



例 30.9(普朗什雷尔等式) 证明如果 f 为无限可微的周期函数,则

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

按照原来的定义，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2 dx &= \int_0^1 \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}\Big) \cdot \Big(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(m)} e^{-2\pi i m x}\Big) dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{f}(m)} \int_0^1 e^{2\pi i (n-m) x} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2,\end{aligned}$$

这是因为积分$\int_0^1 e^{2\pi i(n-m)x} dx$ 除了 $n = m$ 外均为0，而在 $n = m$ 时它等于1.

例 30.10(欧拉)　建立公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

证明　回想我们曾经证明过(见例30.7)对锯齿函数$f(x) = x\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$的傅里叶系数由

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 x e^{-2\pi i n x} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{如果 } n = 0, \\ -\dfrac{1}{2\pi i n}, & \text{如果 } n \neq 0 \end{cases}$$

给出. 因此由普朗什雷尔等式(见例30.9)

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2 dx &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

解出$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$，则这个难忘的公式便出来了：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\pi^2\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{\pi^2}{6}.$$

§30.3 的习题

画出下列周期函数. 计算傅里叶系数$\hat{f}(n)$. 以有限傅里叶级数

$$f(x) \approx \sum_{-4 \leqslant n \leqslant 4} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

近似$f(x)$. 叠置$f(x)$的图像与上面有限傅里叶级数的图像以比较其显示.

(1)$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } 0 \leqslant x < \dfrac{1}{3} \\ 3, & \text{如果 } \dfrac{1}{3} \leqslant x < 1. \end{cases}$

(2)$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{如果 } 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2} \\ x, & \text{如果 } \dfrac{1}{2} \leqslant x < 1. \end{cases}$

(3)$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{如果 } 0 \leqslant x < \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{4}{3}(1-x), & \text{如果 } \dfrac{1}{4} \leqslant x < 1. \end{cases}$

(4)$f(x) = x^2, (0 \leqslant x < 1)$.

(5)$f(x) = e^{-x}, (0 \leqslant x < 1)$.

(6)$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } 0 \leqslant x < \dfrac{1}{4} \\ x - \dfrac{1}{4}, & \text{如果 } \dfrac{1}{4} \leqslant x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{4} - x, & \text{如果 } \dfrac{1}{2} \leqslant x < \dfrac{3}{4} \\ 0, & \text{如果 } \dfrac{3}{4} \leqslant x < 1. \end{cases}$

(7) 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(8) 设f为无限可微的周期函数. 证明对每个整数$k = 1,2,3,\cdots$存在一个常数c使得对所有$n \neq 0$有

$$\hat{f}(n) < \frac{c}{|n|^k}$$

提示:分部积分k次.

第三十章的附加习题

画出下列周期函数$f(x)$. 计算傅里叶系数$\hat{f}(n)$. 以有限傅里叶级数去近似$f(x)$ 并叠置$f(x)$的图像与对多个 n 的有限级数的图像.

(1) $f(x) = x - x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1.$

(2) $$f(x) = \begin{cases} 4x^2, & \text{如果 } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 4(1-x)^2, & \text{如果 } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

(3) $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3c} \\ 1, & \text{如果 } \frac{1}{3c} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3c} \quad c \geqslant 1. \\ 0, & \text{如果 } \frac{2}{3c} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

(4) $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{c} \\ 1, & \text{如果 } \frac{1}{c} \leqslant x \leqslant \frac{c-1}{c} \quad c > 1. \\ 0, & \text{如果 } \frac{c-1}{c} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

(5) $f(x) = e^{2\pi x}, (0 \leqslant x \leqslant 1).$

(6) $f(x) = e^{-ax}\cos(2\pi bx), (0 \leqslant x \leqslant 1).$

(7) $f(x) = e^{-ax}\sin(2\pi bx), (0 \leqslant x \leqslant 1).$

(8) $f(x) = \cosh(2\pi ax), (0 \leqslant x \leqslant 1).$

(9) $f(x) = \sinh(2\pi ax), (0 \leqslant x \leqslant 1).$

(10) 证明

$$\frac{\pi - x}{2} = \frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \cdots,$$

对 $0 < x < 2\pi$ 成立. 提示:用变换 $x = 2\pi u$ 并求左端在 $0 < x < 2\pi$ 上的傅里叶级数.

(11) 证明

$$\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

对 $0 \leqslant x \leqslant 2x$ 成立. 提示:对习题(10) 中公式积分.

(12) 证明$\dfrac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$

对 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 成立.

附录　初等函数及其等式

A.1　二项式

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2$$

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$$

$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4^3+x^4$$

$$\vdots$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k\text{，其中}\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},\binom{n}{0} = 1,$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots(|x|<1).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots(|x|<1).$$

A.2　三角函数

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{4x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 - x^2}$$

$\sin(-x) = -\sin(x)$, $\quad$ $\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $\quad$ $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\quad$ $\tan(-x) = -\tan(x)$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(x)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$$

$$\sin(x) \pm \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = 2\sin\left(\frac{x + y}{2}\right)\sin\left(\frac{y - x}{2}\right)$$

$$\tan(x) \pm \tan(y) = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x)\cos(y)}$$

$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, $\quad$ $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$,

$\sin^3(x) = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$, $\quad$ $\cos^3(x) = \frac{3\cos(x) + \cos(3x)}{4}$

$\sin^4(x) = \frac{3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}$, $\quad$ $\cos^4(x) = \frac{3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}$

$$\sin^2(x) - \sin^2(y) = \sin(x+y)\sin(x-y) = \cos^2(y) - \cos^2(x)$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(y) = \cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2(y) - \sin^2(x)$$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, $\quad$ $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$, $\quad$ $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

$\sin(4x) = \cos(x)(4\sin(x) - 8\sin^3(x))$, $\quad$ $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$

$$\sin(x) = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

$$\cos(x) = x\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2(2n+1)^2}\right)$$

$$\frac{\sin(x)}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\left(\frac{x}{3^n}\right)\right)$$

A.3　指数函数

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad a^x=e^{x\cdot\ln(a)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln(a))^n}{n!}$$

$$a^{x+y}=a^x\cdot a^y,\qquad a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}$$

$$\sin(x)=\frac{1}{2}(e^{ix}-e^{-ix})\qquad \cos(x)=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$$

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)\qquad e^{inx}=(\cos(x)+i\sin(x))^n$$

$e^{inx}=\cos(nx)+i\sin(nx)$ (n = 整数)

A.4　双曲函数

$$\sinh(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \cosh(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \sinh(ix)=i\sin(x)$$

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \cosh(ix)=i\cos(x)$$

$$\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\qquad \tanh(ix)=i\tan(x)$$

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$$

$$\sinh(x\pm y)=\sinh(x)\cosh(y)\pm\sinh(y)\cosh(x)$$

$$\cosh(x\pm y)=\cosh(x)\cosh(y)\pm\sinh(x)\sinh(y)$$

$$\sinh^2(x)=\frac{\cosh(2x)-1}{2}\qquad \cosh^2(x)=\frac{\cosh(2x)+1}{2}$$

$$\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)\qquad \cosh(2x)=2\cosh^2(x)-1$$

$$\sinh(x)=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)\qquad \cosh(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2(2n+1)^2}\right)$$

A.5　对数

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\quad(-1<x\leqslant 1)$$

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n} \quad (0 < x \leqslant 2)$$

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n \quad \left(x \geqslant \frac{1}{2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad (|x| < 1)$$

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)\cdot \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \quad (|x| < 1)$$

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$$

A.6 反三角函数

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(x) \leqslant \frac{\pi}{2}(-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

$$\arcsin(\sin(x)) = x\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 \leqslant \arccos(x) \leqslant \pi(-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

$$\arccos(\cos(x)) = x(0 \leqslant x \leqslant \pi)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}(-\infty < x < \infty),$$

$$\arctan(\tan(x)) = x\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n+1)!} 2^{-2n} x^{2n+1}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \leqslant 1)$$

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \frac{1}{9x^9} + \cdots \quad (|x| \geqslant 1)$$

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \arccos(\sqrt{1-x^2}) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \\ &= -\arccos(\sqrt{1-x^2}) \quad (-1 \leqslant x \leqslant 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arccos(x) &= \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \\ &= \pi - \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \quad (-1 \leqslant x \leqslant 0) \end{aligned}$$

$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

符　　号

索　　引

D

E

F

G

H

J

Y

Z